

Л. П. Евстафьева А. П. Карп

Алгебра

Дидактические материалы



8



ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Л. П. Евстафьева А. П. Карп

Алгебра

**Дидактические
материалы**

8 класс

Учебное пособие
для общеобразовательных
организаций

8-е издание

Москва
«Просвещение»
2017

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
Е26

6+

Евстафьева Л. П.

Е26 Алгебра. Дидактические материалы. 8 класс : учеб. пособие для общеобразоват. организаций / Л. П. Евстафьева, А. П. Карп. — 8-е изд. — М. : Просвещение, 2017. — 143 с. : ил. — ISBN 978-5-09-046315-7.

Книга содержит упражнения по алгебре, функциям и анализу данных к учебнику «Алгебра, 8» под редакцией Г. В. Дорофеева. Дидактические материалы включают обучающие работы с заданиями разного уровня сложности и проверочные работы для организации текущего оперативного контроля.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-09-046315-7

© Издательство «Просвещение», 2008
© Художественное оформление.
Издательство «Просвещение», 2008
Все права защищены

Предисловие

Дидактические материалы предназначены для организации самостоятельной дифференцированной работы учащихся и содержат разнообразный материал, который может быть использован на различных этапах изучения темы и для разных групп учащихся.

Книга состоит из двух разделов:

I. Обучающие работы.

II. Проверочные работы.

В каждом из разделов работы распределены по шести главам, названия которых совпадают. Внутри глав все работы имеют сквозную нумерацию.

Обучающие работы (О-1, О-2 и т. д.) нацелены на формирование важнейших умений и навыков, связанных с материалом 8 класса. Они предназначены для организации обучения в текущем учебном процессе и используются, когда упражнений учебника не хватает для отработки навыков, для дополнительной работы с отстающими учениками, для развития математических знаний и умений школьников. Тематика каждой работы указана в ее названии.

Большинство обучающих работ содержит опорные сведения, в которых приводятся образцы решения основных задач, правила, некоторые термины и т. д. Далее следуют задания разного уровня сложности, разбитые на две части горизонтальной чертой. Задания первой части направлены прежде всего на достижение уровня обязательной подготовки. Задания второй части предназначены для овладения изучаемым материалом на более высоком уровне. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. Обучающие работы не регламентированы по времени и могут использоваться отдельными фрагментами на различных этапах формирования конкретного умения как для самостоятельной дифференцированной работы, так и для фронтальной работы с классом.

Работы рубрики «Проверь себя!» содержат задания с выбором ответа и снабжены ключом — перечнем верных ответов. Они предназначены для самостоятельного обзора и повторения законченных фрагментов учебного материала.

Проверочные работы (П-1, П-2 и т. д.) охватывают весь материал курса. Они предназначены для организации текущего оперативного контроля и рассчитаны на 10—15 мин. Эти работы представлены в двух вариантах одного уровня сложности. Многие из них содержат по одному заданию более высокой сложности, отмеченному звездочкой. Эти задания могут быть опущены или включены в состав работы в зависимости от ситуации по усмотрению учителя.

Главы 1, 2 и 3 написаны Л. П. Евстафьевой, главы 4, 5 и 6 — А. П. Карпом.

Раздел I. ОБУЧАЮЩИЕ РАБОТЫ

Глава 1. Алгебраические дроби

О-1. Повторение. Действия

с одночленами и многочленами

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a + (b + c) = a + b + c$$

$$a - (b + c) = a - b - c$$

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

1. Выполните действия:

1) а) $-2 \cdot 3^2 + 6^2$; б) $4,6^2 - 3,6^2$; в) $1,37 \cdot 3,4 + 6,6 \cdot 1,37$.

2) а) $(3,74 + 2,26)^2$; б) $2,4^2 - 2 \cdot 2,4 \cdot 1,4 + 1,4^2$; в) $\frac{2^7 \cdot 2^2}{(2^3)^3}$.

3) а) $\frac{14^5}{7^5}$; б) $-5 \cdot 2^3 + 10^3$; в) $0,75^2 - 0,74^2$.

2. Упростите выражение:

1) а) $-2(3a - b) + 6a$; в) $(x - 6y)(x + 6y) + 9(2y)^2$.
б) $(m - 2n)^2 + 4mn$;

2) а) $4(3x - 2y) + 8y$; в) $(a + 8b)(-a + 8b) - 4(4b)^2$.
б) $6xy - (x + 3y)^2$;

3) а) $6m - 3(2m - 5n)$; в) $-4(3a)^2 + (6a - 5c)(6a + 5c)$.
б) $4a^2 - (b - 2a)^2$;

3. Представьте выражение в виде произведения:

1) а) $ab - cb$; в) $25x^2 - 16y^2$;
б) $4a^2b - 6ab^2$; г) $9m^2 - 12mn + 4n^2$.

2) а) $8x + 6y$; в) $64m^2 - 49n^2$;
б) $-15x^3y^2 + 18xy^4$; г) $25a^2 + 40ab + 16b^2$.

3) а) $a^2x - a^2y$; в) $-x^2 + y^2$;
б) $1,2a^5b^3 - 2,4a^3b^5$; г) $-2mn + m^2 + n^2$.

4. Найдите значение выражения при данных значениях переменных:
- а) $-3a^2 + b^2$ при $a = -2$, $b = 5$;
 б) $13x - 26y$ при $x = 2,4$, $y = -3,8$;
 в) $-12ab + 7cd + 8ab + 3cd + 4ab$ при $a = 0,86$, $b = 4,2$, $c = 0,4$, $d = 2,5$.
5. Решите уравнение:
- 1) а) $2x - 3 = 1 - 5x$; в) $(x - 2)(2x + 5) = 0$.
 б) $(2y - 3)5y = 10(y^2 - 1)$;
 2) а) $2(3x - 5) = 5(x - 1)$; в) $(3y - 1)(y + 4) = 0$.
 б) $(2x - 1)(3x + 2) = 6(x^2 - x + 2)$;
 3) а) $2 - (3x - 7) = -2(x + 1)$; в) $(3x - 5)^2 = 0$.
 б) $(5y - 1)(5y + 1) = 25y^2 - (3y - 2)$;
-
6. Вычислите:
- 1) а) $0,4^2 \cdot 2,5^3$; в) $17,6^2 + 4,8 \cdot 17,6 + 2,4^2$.
 б) $7,8^2 + 3,4^2 - 6,8^2 - 6,6^2$;
 2) а) $\frac{6,4^3}{1,6^3} - 6400 \cdot (-0,1)^2$;
 б) $3,7 \cdot 2,4 - 2,5 \cdot 2,4 + 2,6 \cdot 4,8 - 2,6 \cdot 3,1$;
 в) $9 \cdot 3,2^2 - 9 \cdot 2,2^2$.
 3) а) $-0,8^4 \cdot 1,25^3$; в) $-2,54^2 + 3,54^2$.
 б) $4^3 \cdot 2,5^2 - 4^2 \cdot 2,5^3$;
7. Упростите выражение:
- 1) а) $-2a(3a - b) + 6(a - b)(a + b)$;
 б) $(2m - 3n)^2 + (3m - 2n)^2$;
 в) $(x^2y^3 + 1)(x^2y^3 - 1) - x^4y^6$.
 2) а) $-9x^2(2x - y^2) + (1 - 3xy)(1 + 3xy) + \frac{1}{2}x(6x)^2$;
 б) $-(m^2 - 2n^3)^2 - m^2(4n^3 - m^2)$;
 в) $(3a - 4)^2 - 3a(3a - 8)$.
8. Найдите значение выражения при данных значениях переменных:
- а) $-x^2 + 8x$ при $x = -0,2$;
 б) $(2a + 1)(8a - 1) + (4a - 5)(3 - 2a) + 12$ при $a = 0$;
 в) $(3a + 1)(7a - 2) - (21a - 13)(a + 4) - 2 \cdot 5^2$ при $a = 1,11$;
 г) $(3x - 2y)^2 - (2x - 3y)^2$ при $x = 1,76$, $y = 2,76$.

9. Решите уравнение:

а) $x(2x - 5) - 3(2x - 5) = 0$;

б) $x^2 - 6x + 9 = 0$;

в) $x^2 - 2,54^2 = 0$;

г) $x^2(x - 7) - 4(x - 7) = 0$.

О-2. Алгебраические дроби

1. Замените знак «:» чертой дроби:

1) а) $a : x$; г) $m - n : (m + n)$;

б) $a : x + y$; д) $(m - n) : (m + n)$.

в) $a : (x + y)$;

2) а) $c : d$; г) $x + y : (x - y)$;

б) $(c + d) : a$; д) $(x + y) : (x - y)$.

в) $c + d : a$;

3) а) $m : n$; г) $m - 1 : (n + 2)$;

б) $m - 1 : n$; д) $m - 1 : n + 2$.

в) $(m - 1) : n$;

2. Проверьте умножением, верно ли равенство:

1) а) $(5a - 10b) : (2b - a) = -5$; г) $\frac{49a^2 - 25b^2}{7a - 5b} = 7a - 5b$;

б) $(3x^3 + 6x^2) : 3x = x^2 + 2$;

в) $\frac{4m^2 - 3mn}{4m - 3n} = m$; д) $\frac{a - b}{b - a} = -1$.

2) а) $(2m^2 - mn - 3n^2) : (2m - 3n) = m + n$;

б) $\frac{4x^3 - 4x + 1}{2x + 1} = 2x - 1$; г) $\frac{3x^2 - 2xy - y^2}{3x - y} = x + y$;

в) $\frac{8a^3 - b^3}{2a - b} = 4a^2 + 2ab + b^2$; д) $\frac{(a - b)^2}{(b - a)^2} = 1$.

3. Найдите значение алгебраической дроби при данных значениях переменных:

1) а) $\frac{2a}{3b}$ при $a = 1,8$, $b = -1,2$;

б) $\frac{6a - 5b}{6a}$ при $a = -1,5$, $b = 9$.

2) а) $\frac{-3x^2}{y}$ при $x = -2$, $y = 0,6$;

б) $\frac{m - 7n}{14n}$ при $m = 0,7$, $n = 0,1$.

4. Какие из частных равны нулю, а какие не имеют смысла:

- 1) а) $(2,25 - 1,5^2) : 4,87$; в) $\frac{3,2}{10 - 1,25 \cdot 8}$;
 б) $\frac{-1,2 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,9}{5,6^2}$; г) $\frac{0,4^2 - 0,16}{5 \cdot 1,2 - 0,3 \cdot 20}$?
- 2) а) $(0,4 \cdot 25 - 10) : (-0,67)$; в) $\frac{24,6 \cdot 0,32}{-1,6 \cdot 0,4 + 0,8^2}$;
 б) $\frac{0,9^2 - 0,81}{3,4 \cdot 1,75}$; г) $\frac{5^2 - 25}{0,49 - 0,7^2}$?

5. Определите, имеет ли дробь смысл при заданном значении переменной, и, если имеет, найдите значение дроби:

- а) $\frac{7a - 8}{a + 1}$ при $a = 3$, $a = 1\frac{1}{7}$, $a = -1$, $a = 0,2$;
 б) $\frac{2m^3 - 50}{m - 3}$ при $m = 1$, $m = 5$, $m = -5$, $m = 3$, $m = -7$;
 в) $\frac{x - 2}{x^2 + x - 6}$ при $x = -3$, $x = 2$, $x = -1$.

6. Найдите значение дроби при данных значениях переменных:

- а) $\frac{(2a - 3b) - (-3b - a)}{b}$ при $a = 1,4$, $b = -0,7$;
 б) $\frac{2(3x - 5y) + 5(2y - x)}{x + y}$ при $x = 1,2$, $y = 1,8$.

7. Найдите значения переменной, при которых значение дроби равно нулю, или докажите, что таких значений нет:

- 1) а) $\frac{a}{a - 3}$; б) $\frac{2x - 5}{x}$; в) $\frac{m(m - 3)}{m^2 + 1}$; г) $\frac{y(y - 3)}{y^2 - 4y + 3}$; д) $\frac{a^2 + 4}{a}$.
 2) а) $\frac{m - 3}{m}$; б) $\frac{a}{2a - 5}$; в) $\frac{a^2 + 1}{a(a - 3)}$; г) $\frac{x(x - 2)}{x^2 - 3x + 2}$; д) $\frac{p(p + 1)}{p^2 + 7}$.

8. Найдите значения переменной, при которых значение дроби не существует, или докажите, что таких значений нет:

- 1) а) $\frac{a}{a - 3}$; б) $\frac{2x - 5}{x}$; в) $\frac{m^2 + 1}{m(m - 3)}$; г) $\frac{y^2 - 4y + 3}{(y - 1)(y + 7)}$; д) $\frac{a}{a^2 + 4}$.
 2) а) $\frac{m - 3}{m}$; б) $\frac{a}{2a - 5}$; в) $\frac{a(a - 3)}{a^2 + 1}$; г) $\frac{x^2 - 3x + 2}{(x - 5)(x + 1)}$; д) $\frac{p^2 + 7}{p(p + 1)}$.

9. При каких значениях переменной дробь имеет значение:

- 1) а) $\frac{a}{a-3}$; б) $\frac{2x-5}{x}$; в) $\frac{m^2+1}{m(m-3)}$; г) $\frac{y^2-4y+3}{(y-1)(y+7)}$; д) $\frac{a}{a^2+4}$?
- 2) а) $\frac{m-3}{m}$; б) $\frac{a}{2a-5}$; в) $\frac{a(a-3)}{a^2+1}$; г) $\frac{x^2-3x+2}{(x-5)(x+1)}$; д) $\frac{p^2+7}{p(p+1)}$?

10. Составьте выражение по условию задачи:

а) Из двух городов, расстояние между которыми S км, одновременно навстречу друг другу выехали две машины со скоростями v_1 км/ч и v_2 км/ч (рис. 1). Через сколько часов они встретятся?

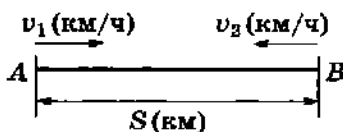


Рис. 1

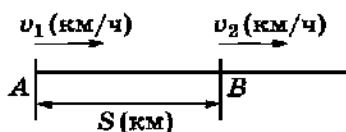


Рис. 2

б) Из двух городов, расстояние между которыми S км, одновременно в одном направлении выехали две машины со скоростями v_1 км/ч и v_2 км/ч, причем $v_1 > v_2$ (рис. 2). Через сколько часов первая машина догонит вторую?

в) Пешеход, идущий со скоростью v км/ч, тратит на путь от пункта A до пункта B t ч. Сколько времени тратит на этот же путь велосипедист, скорость которого на 8 км/ч больше скорости пешехода?

г) Мастер и ученик, работая вместе t ч, изготовили p деталей. Мастер изготавливает a деталей в час. Сколько деталей в час изготавливает ученик?

11. Найдите значение дроби:

- а) $\frac{4a^2+12ab+9b^2}{d^2-c^2}$ при $a=5$, $b=4$, $c=6$, $d=16$;
- б) $\frac{25x^2-30xy+36y^2}{12x-12y}$ при $x=3$, $y=1,5$;
- в) $\frac{ax-bx+ac-bc}{1,5a-1,5x}$ при $a=3,5$, $b=2$, $x=2,5$, $c=4,5$.

12. Назовите пару значений a и b , при которых дробь равна нулю:

- а) $\frac{a^2+2ab+b^2}{3a}$; б) $\frac{a^2-ab+3a-3b}{b-7}$; в) $\frac{3a}{b^2-2b+1}$; г) $\frac{a^2+b^2}{a^2-4}$.

13. Назовите пару значений x и y , при которых дробь не имеет смысла:

а) $\frac{x+y}{x^2-4y^2}$; б) $\frac{2y}{x^2+4x+4}$; в) $\frac{x^2}{y-2}$; г) $\frac{x^2+y^2}{(x-3)^3+(y+2)^2}$.

14. Переменные a и b связаны данным равенством. Выразите переменную b через a :

а) $ab - a = 1$, если $a \neq 0$; в) $a^2b = 1 - b$;
б) $ab - b = 1$, если $a \neq 1$; г) $a^2b = a - 2b$.

О-3. Основное свойство дроби

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0$$

1. Умножьте числитель и знаменатель дроби на указанное число:

а) $\frac{2a}{3b}$ на 5; в) $\frac{\frac{2}{3}a + \frac{1}{6}b}{c}$ на 6;
б) $\frac{2a+b}{3c}$ на 2; г) $\frac{\frac{1}{5}a-b}{a-\frac{1}{2}b}$ на 10.

2. Заполните пропуск так, чтобы равенство было верным, напишите дополнительные множители:

а) $\frac{8a}{b^2} = \frac{\dots}{b^3}$; г) $\frac{m}{\dots} = \frac{m^2}{mn-m^2}$;
б) $\frac{5c}{ab} = \frac{\dots}{8a^3b^2}$; д) $\frac{n}{\dots} = \frac{a^3n^2}{5a^6n}$;
в) $\frac{3a+b}{a+b} = \frac{\dots}{a(a+b)}$; е) $\frac{x}{2x-2y} = \frac{\dots}{8x-8y}$.

3. Приведите дробь к указанному знаменателю, подпишите дополнительный множитель:

а) $\frac{b^2}{3a} = \frac{\dots}{6a^2c}$; д) $\frac{5}{a-b} = \frac{\dots}{(b-a)^2}$;
б) $\frac{3}{5a} = \frac{\dots}{5a(a-b)}$; е) $\frac{5}{x-y} = \frac{\dots}{y-x}$;
в) $\frac{4}{a-b} = \frac{\dots}{a^2-b^2}$; ж) $\frac{7x}{x-2y} = \frac{\dots}{x^2-2xy}$;
г) $\frac{3a}{a-b} = \frac{\dots}{(a-b)^2}$; з) $\frac{15}{x-2y} = \frac{\dots}{2xy-x^2}$.

При сокращении дробей помните, что:

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}; \quad \frac{a-b}{b-a} = -1; \quad (a-b)^2 = (b-a)^2.$$

4. Сократите дробь:

1) а) $\frac{15a}{25b}$;

д) $\frac{a^5 \cdot a^3}{a^{10}}$;

б) $\frac{15a + 15c}{25b}$;

е) $\frac{a^5 + a^3}{a^{10}}$;

в) $\frac{5a \cdot 5b}{10c}$;

ж) $\frac{a^5 + a^3}{a^6 + a^4}$.

г) $\frac{5a - 5b}{10c}$;

2) а) $\frac{12a^3b^2}{18a^4}$;

в) $\frac{12a^3b^2 + 6a^2}{18a^4 - 3a^2}$;

д) $\frac{a^2 - ab}{b - a}$;

б) $\frac{12a^3b^2 + 6a^2}{18a^4}$;

г) $\frac{a^3 + ab}{a}$;

е) $\frac{-a^2 + ab}{a^2b - ab^2}$.

3) а) $\frac{x^2 - 4y^2}{x + 2y}$;

б) $\frac{x^2 - 4y^2}{x - 2y}$;

в) $\frac{2y + x}{x^2 - 4y^2}$;

г) $\frac{2y - x}{x^2 - 4y^2}$.

4) а) $\frac{m^2 - 25}{m^2 + 10m + 25}$;

в) $\frac{m^2 - 10m + 25}{m^2 - 25}$;

б) $\frac{m^2 + 10m + 25}{25 - m^2}$;

г) $\frac{25 - m^2}{m^2 - 10m + 25}$.

5. Найдите значение дроби:

а) $\frac{5(a-5)}{a^2-25}$ при $a = -4,5$;

б) $\frac{9a^2-6a+1}{6a-2}$ при $a = 1,8$;

в) $\frac{(x-5)(2x-3)}{9-4x^2}$ при $x = -0,2$;

г) $\frac{4c^2-81}{4c^2+36c+81}$ при $c = 2,5$.

$$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}; \quad \frac{a}{b} = \frac{-a}{b}; \quad \frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$$

6. Используя данные равенства, замените данную дробь равным ей выражением:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \frac{3a-2b}{a-b}; & \text{в)} \frac{a-5b}{a+2b}; & \text{д)} \frac{2a-b}{a+2}; \\ \text{б)} \frac{-5x-y}{x+y}; & \text{г)} \frac{x+y}{2x-3y}; & \text{е)} \frac{3a-1}{a-4}. \end{array}$$

7. Сократите дробь:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \frac{5(a-b) \cdot c(a-b)}{b-a}; & \text{г)} \frac{m^3+8c^3}{4c^2-2cm+m^2}; \\ \text{б)} \frac{5(a-b)+c(a-b)}{b-a}; & \text{д)} \frac{27x^6-y^3}{9x^4+3x^2y+y^2}; \\ \text{в)} \frac{b-a}{5(a-b)^2+c(a-b)}; & \text{е)} \frac{9-b^2-c^2-2bc}{b^2-c^2-9-6c}. \end{array}$$

8. Найдите значение дроби при указанных значениях переменных:

$$\begin{array}{l} \text{а)} \frac{ax-ay+bx-by}{3x^2-3y^2} \text{ при } a=1,72, b=1,28, x=0,8, \\ y=0,2; \\ \text{б)} \frac{a^3-27b^3}{a^3+3a^2b+9ab^2} \text{ при } a=3,6, b=-0,9; \\ \text{в)} \frac{a^4-b^4}{(a+b)^2-2ab} \text{ при } a=7,2, b=1,8. \end{array}$$

⊙ Проверь себя!

1. Какому из выражений равно выражение $a:(a+c)^2-2$?

$$\text{А. } \frac{a}{(a+c)^2}-2. \quad \text{Б. } \frac{a}{(a+c)^2-2}. \quad \text{В. } \frac{a}{a^2+c^2}-2.$$

2. Найдите значение дроби $\frac{-a^2}{a^3-3}$ при $a=2$.

$$\text{А. } \frac{4}{5}. \quad \text{Б. } -\frac{4}{3}. \quad \text{В. } -0,8.$$

3. Найдите значение дроби $\frac{abc}{a+b}$ при $a=0,8$, $b=-4,8$, $c=12,5$.

$$\text{А. } -12. \quad \text{Б. } 12. \quad \text{В. } 120.$$

4. При каком из данных значений x значение дроби $\frac{3x-2}{x+1}$ равно нулю?
 А. -1 . Б. $\frac{2}{3}$. В. $-\frac{2}{3}$.
5. При каком из данных значений a дробь $\frac{5a}{-a^2+9}$ не имеет смысла?
 А. 3 . Б. 0 . В. -5 .
6. Какой дроби равна дробь $\frac{3a-12b}{6b}$ после ее сокращения?
 А. $3a-2$. Б. $\frac{a-12b}{2b}$. В. $\frac{a-4b}{2b}$.
7. Сократите дробь $\frac{2(x-2)^2}{4-x^2}$.
 А. $\frac{(x-2)^2}{2-x^2}$. Б. $\frac{4-2x}{x+2}$. В. -2 .
8. После умножения на m^3 числителя и знаменателя дроби $\frac{2m^2n}{2m^2+n}$ получится:
 А. $\frac{2m^5n}{2m^5+m^3n}$. Б. $\frac{2m^6n}{2m^6+n}$. В. $\frac{2m^5n}{2m^5+n}$.
9. Найдите значение дроби $\frac{x^2-4xy+4y^2}{4y^3-x^2}$ при $x=-1$, $y=3,5$.
 А. $-1\frac{1}{3}$. Б. $1\frac{1}{3}$. В. $\frac{3}{4}$.
10. Какое из выражений равно дроби $\frac{-5-x}{x-2}$?
 А. $\frac{x+5}{x-2}$. Б. $\frac{x+5}{2-x}$. В. $\frac{x+5}{2-x}$.
- О — А В Б В А В Б А Б В**

О-4. Сложение и вычитание алгебраических дробей

$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$	$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$
$a + (b + c) = a + b + c$	$a - (b + c) = a - b - c$
$-1 \cdot a = -a$	$(a - b)^2 = (b - a)^2$

1. Сформулируйте словами правила, записанные в рамке.
Не забывайте про них при выполнении заданий!

2. Выполните сложение и вычитание дробей:

1) а) $\frac{7p}{18} + \frac{5p}{18}$; д) $-\frac{3m}{m^2 - n^2} + \frac{2m - n}{m^2 - n^2}$;

б) $\frac{5}{3x} - \frac{2}{3x}$; е) $\frac{(c+d)^2}{cd} - \frac{(c-d)^2}{cd}$;

в) $\frac{7a}{a+b} + \frac{7b}{a+b}$; ж) $\frac{2a-7b}{(a-b)^2} + \frac{6b-a}{(b-a)^2}$.

г) $\frac{2x}{x^2-4} - \frac{x^2}{x^2-4}$;

2) а) $\frac{5}{a} + \frac{3}{-a}$; б) $\frac{7a}{-3x} + \frac{a}{3x}$; в) $-\frac{4}{a-b} + \frac{5}{b-a}$; г) $\frac{2x}{x+y} - \frac{2y}{-x-y}$.

3) а) $\frac{x}{3} - \frac{y}{6}$; д) $\frac{m}{6a^2} - \frac{n}{3a^3}$;

б) $\frac{a-1}{2} + \frac{3-a}{3}$; е) $\frac{7}{12x^2y} + \frac{5}{18xy^2}$;

в) $\frac{4}{3m} - \frac{5}{3n}$; ж) $\frac{a+b}{a^2} + \frac{a-b}{ab}$.

г) $\frac{7}{a^2} - \frac{6}{a}$;

4) а) $\frac{4x}{3(x+1)} - \frac{x-1}{x+1}$; г) $\frac{5x+3y}{2(x+y)} - \frac{7x+4y}{3(x+y)}$;

б) $\frac{2a}{3(a-b)} + \frac{a-2}{b-a}$; д) $\frac{5a+3b}{2(a-b)} + \frac{4b+8a}{3(b-a)}$.

в) $\frac{4-a}{a(a-2)} + \frac{2}{a}$;

5) а) $\frac{1}{a+2} - \frac{1}{a}$; г) $\frac{15}{(m+2)(m-3)} + \frac{12}{4-m^2}$;

б) $\frac{2}{x^2-2x} + \frac{1}{2-x}$; д) $5 + \frac{3-5a}{a+1}$.

в) $\frac{1}{c-3} - \frac{6}{c^2-9}$;

3. Найдите среди приведенных ниже вариантов ответа дробь, равную сумме или разности данных дробей:

а) $-\frac{4x-3y}{3xy} + \frac{4x+3}{3xy}$; в) $\frac{y}{x-y} + \frac{x^2+y^2}{2xy-2x^2}$;

б) $\frac{y+1}{y^2-xy} - \frac{1-x}{x^2-xy}$; г) $1 - \frac{x+y}{2x}$.

Варианты ответа: $\frac{y+1}{xy}$; $\frac{y-x}{2x}$; $\frac{x-y}{2x}$; $\frac{x+y}{xy(y-x)}$.

4. Вычислите значение данного выражения, предварительно упростив его:

а) $\frac{1+4a}{2a-3} + \frac{5a-1}{3-2a}$ при $a = 6,5$;

б) $5x - \frac{10x^2}{3+2x}$ при $x = -2$;

в) $\frac{10a}{b^2-a^2} + \frac{5}{a+b}$ при $a = \frac{4}{9}$, $b = \frac{1}{3}$.

5. Упростите выражение и убедитесь, что ваш ответ есть среди вариантов ответа, приведенных ниже:

а) $\frac{1}{2-a} - \frac{1}{2+a} + \frac{a}{a^2-4} - \frac{a^2+4}{8a-2a^3}$;

б) $\frac{a^2-3a+9}{a-3} + \frac{a^2+3a+9}{a+3}$;

в) $\frac{1}{a^2-8a+16} - \frac{1}{a^2+8a+16} + \frac{a}{a^2-16}$.

Варианты ответа: $\frac{1}{2a}$; $\frac{a^3}{(a^2-16)^2}$; $\frac{1}{2a}$; $\frac{2a^3}{a^2-9}$.

6. Найдите числа a , b и c , при которых верно равенство:

а) $\frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2} = \frac{1}{x^2-4}$;

б) $\frac{x^2+1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$.

7. Вычислите значение данного выражения, предварительно упростив его. Убедитесь, что ваш ответ есть среди вариантов ответа, приведенных ниже:

а) $\frac{2x-5}{x^2-6x+9} - \frac{x+8}{(3-x)^2} + \frac{10}{9+x^2-6x}$ при $x = 3,1$;

б) $-\frac{2(a+4)}{a^3-8} + \frac{1}{2-a} - \frac{a+2}{a^2+2a+4}$ при $a = 4,5$.

Варианты ответа: $-0,8$; 10 ; 12 .

8. Упростите выражение:

а) $\frac{5a^2-b^2}{2a+b} - 2a + b$;

б) $\frac{1}{(a-3)(a-m)} + \frac{1}{(3-m)(3-a)} + \frac{1}{(m-a)(m-3)}$.

О-5. Умножение и деление дробей, возведение в степень

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \\ \frac{a}{b} : \frac{c}{d} &= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \\ a : \frac{b}{c} &= \frac{a}{1} : \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c}{1 \cdot b} \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n}\end{aligned}$$

1. Выполните действия:

1) а) $\frac{3}{8} \cdot \frac{16}{27}$; в) $\frac{6}{a} \cdot \frac{b}{10}$; д) $\frac{5}{7} \cdot 3$; ж) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$;
б) $1\frac{5}{7} : \frac{3}{14}$; г) $\frac{4}{x} : \frac{5}{2x}$; е) $2 : \frac{2}{3}$; з) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 : 4$.

2) а) $\frac{m^8}{8n^9} \cdot \frac{12n^{10}}{m^{12}}$; в) $\frac{x^3y^2}{5c} : \frac{15x^2y^3}{4c}$; д) $\left(\frac{m^2}{n^3}\right)^2 : \frac{2m^4}{n^5}$;
б) $\frac{8a^{17}}{b^7} : \frac{24a^{15}}{b^{10}}$; г) $\frac{4x^2}{3y} : 8x$; е) $2a^2 : \frac{3a^2}{b}$.

3) а) $\frac{2a-3b}{4c} \cdot \frac{11c^2}{3b-2a}$; г) $\frac{x^2-4x}{8a^3} : \frac{x^2-16}{16a^4}$;
б) $\frac{x^2-3xy}{a+b} : \frac{x-3y}{a^2+ab}$; д) $\frac{m^2n^3}{m^2-2mn+n^2} \cdot \frac{n^2-mn}{2m^2}$;
в) $\frac{a-b}{a+3b} \cdot \frac{a^2-9b^2}{a^2-b^2}$; е) $\frac{3a-3p}{ap} : \frac{a^2-ap}{3p}$.

4) а) $\frac{1}{a^2-4b^2} \cdot (4b^2-4ab+a^2)$; г) $\frac{a^2-25b^2}{a-b} : (a-5b)$;
б) $\frac{a}{x^2-xy} : \frac{2a}{x^2-y^2}$; д) $\left(\frac{x-y}{x^2y}\right)^2 \cdot \frac{x^3y^3}{x^2-2xy+y^2}$;
в) $3a^2 : \frac{6a^3}{x+y}$; е) $\frac{a^2-b^2}{4a^4b^2} : \left(\frac{a+b}{3a^2b}\right)^2$.

2. Выполните действия и убедитесь, что ваш ответ есть среди приведенных ниже вариантов ответа:

$$a) \left(\frac{x}{y^2}\right)^3 : \left(\frac{y}{2x} \cdot \frac{x^2}{y^3}\right)^2;$$

$$б) \frac{25 - 10a + a^2}{2a + 6} \cdot \frac{9 + 6a + a^2}{a + a^2} : \frac{2a - 10}{a + 1};$$

$$в) \frac{9 - x^2 - 2xy - y^2}{x^2 - 9} : \frac{3 + x + y}{3 - x} \cdot \frac{x^2 + 6x + 9}{6 - 2x - 2y};$$

$$г) \left(\frac{m^2 - 4}{2m^6}\right)^2 \cdot \frac{8m^3}{4 - 4m + m^2} : \frac{4 + 4m + m^2}{3m^{10}}.$$

Варианты ответа: $\frac{a^2 - 2a + 15}{4a}$; $\frac{4x}{y^2}$; $-\frac{x + 3}{2}$; $6m$;
 $\frac{a^2 + 2a + 15}{4a}$; $-6m$.

3. Найдите значение выражения и убедитесь, что ваш ответ есть среди приведенных ниже вариантов ответа:

$$a) \left(-\frac{2a^2}{b^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{b^2}{-2a}\right)^4 \text{ при } a = -5, b = 2,5;$$

$$б) \frac{27 - a^3}{27 + a^3} : \frac{a^2 + 3a + 9}{a^2 - 3a + 9} \text{ при } a = 1,5;$$

$$в) \frac{x^2 - 16y^2}{16y^2 + 4xy + x^2} : \frac{16y^2 - 8xy + y^2}{64y^3 - x^3} \text{ при } x = 2,7, y = \frac{1}{4}.$$

Варианты ответа: $\frac{1}{3}$; $-1,7$; -5 ; $-3,7$; 5 .

4. Найдите A из данного равенства и убедитесь, что ваш ответ есть среди приведенных ниже вариантов ответа:

$$a) \frac{A}{(x - y)^3} \cdot \frac{y^2 - 2yx + x^2}{x + y} = 1;$$

$$б) \frac{x^2 - xy - 2x + 2y}{x^3 - 4x} : \frac{A}{x} = 1;$$

$$в) \frac{9 - (x - 2)^2}{25 - x^2} \cdot \frac{x + 5}{A} = 1;$$

$$г) \frac{4 - (x + y)^2}{2x + x^2 + xy} : \frac{2 - (x + y)}{A} = 1.$$

Варианты ответа: x ; $x + 1$; $x^2 - y^2$; $\frac{x + y}{x - 2}$; $\frac{x - y}{x + 2}$.

О-6. Совместные действия с алгебраическими дробями

1. Упростите выражение:

1) а) $\frac{a}{b} - \frac{a^2 - b^2}{b^2} \cdot \frac{b}{a+b};$

б) $\frac{xy - x^2}{y-1} : \frac{x^2}{1-y} - \frac{x-y}{2x};$

в) $\frac{3a-2}{a^2-4} + \frac{3}{a^2-4} : \frac{3}{a+2} + \frac{a}{a+2};$

г) $\frac{2m-7}{1-n} + \frac{2}{m^2+3m+9} \cdot \frac{m^3-27}{n-1}.$

2) а) $\left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} \right) \cdot \frac{x^2-y^2}{xy};$

б) $\frac{n}{m-n} : \left(\frac{m+n}{m} - \frac{m}{m-n} \right);$

в) $\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a-b}{a+b} \right) : \frac{2ab}{a+b};$

г) $\left(\frac{x+2}{x^2-2x+4} - \frac{6x}{x^3+8} \right) : \frac{3}{x+2}.$

3) а) $\left(\frac{x+4}{3x+3} - \frac{1}{x+1} \right) : \frac{x+1}{3} + \frac{2}{x^2-1};$

б) $\frac{1}{m-2} - \frac{4m}{m^2-4} \cdot \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m^2-m} \right);$

в) $\left(\frac{b}{a^2+ab} - \frac{b-a}{b^2+ab} \right) : \left(\frac{a^2}{b^3-a^2b} - \frac{1}{a+b} \right);$

г) $\left(\frac{5m}{n^4} - \frac{5}{mn^2} \right) : \left(\frac{m+n}{2n^2} \right)^2.$

2. Упростите выражение:

1) а) $\frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}+1};$ б) $\frac{\frac{3a-b}{4}-a}{\frac{3a+b}{4}-b};$ в) $\frac{x-2+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}};$ г) $\frac{\frac{a^2+1}{a^2}+\frac{1}{a}}{a-\frac{1}{a^2}}.$

$$2) \text{ а) } \frac{\frac{a}{a-1} - 1}{1 + \frac{a}{a-1}}; \text{ б) } \frac{\frac{2x-y}{x-y} - 1}{1 - \frac{2x+y}{x-y}}; \text{ в) } \frac{m-5 + \frac{1}{m-3}}{m+3 - \frac{7}{m-3}}; \text{ г) } \frac{\frac{4b^2+1}{4b^2} - \frac{1}{2b}}{2b + \frac{1}{4b^2}}.$$

3. Докажите, что:

- 1) а) $\left(\frac{m}{n} - \frac{n}{m}\right) : \left(\frac{m}{n} + \frac{n}{m} - 2\right) : \left(1 + \frac{n}{m}\right) = \frac{m}{m-n};$
 б) $\left(\frac{2x^2+x}{x^3-1} - \frac{x+1}{x^2+x+1}\right) \cdot \left(1 + \frac{x+1}{x} - \frac{x^2+5x}{x^2+x}\right) \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x+1}.$
- 2) а) $\left(a + \frac{6-a^2}{1+a}\right) : \frac{6+a}{a^2-1} = a-1;$
 б) $\left(x + 5 + \frac{15}{x-5}\right) : \frac{x^2-10}{25-10x+x^2} = x-5.$
- 3) $\frac{a^3+b^3}{a+b} : (a^2-b^2) - \frac{ab}{a^2-b^2} + \frac{2b}{a+b} = 1.$
- 4) $\left(6 - \frac{4x^2+21}{2-2x}\right) : \frac{4x+6-2xy-3y}{2x-2} = \frac{2x+3}{2-y}.$
- 5) $\left(a + 1 - \frac{2}{a+1}\right)^2 - \left(a + 1 + \frac{2}{a+1}\right)^2 = -8.$
- 6) $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right) \cdot \left(\frac{b}{a} + 1\right) : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) = 1 - \frac{b}{a}.$



Проверь себя!

1. Какой из дробей равна разность $\frac{4a-3b}{4(a-b)} - \frac{5b-7a}{5(b-a)}$?
- А. $\frac{8a-4b}{a-b}.$ Б. $\frac{5b-8a}{20(a-b)}.$ В. $\frac{5b+48a}{20(a-b)}.$
2. Чему равно значение разности $\frac{a-b}{ab} - \frac{a-c}{ac}$ при $a = 1,876$, $b = 0,4$, $c = 2,5$?
- А. 2,1. Б. 2,876. В. 0,29.
3. Упростите произведение дробей $\frac{x^2-4x+4}{9-a^2} \cdot \frac{a+3}{2-x}.$
- А. $\frac{2-x}{a-3}.$ Б. $\frac{x-2}{a-3}.$ В. $\frac{x-2}{3-a}.$

4. Упростите частное $(a^2 - 3a) : \frac{3a^2 - a^3}{b}$.

А. $\frac{a}{b}$.

Б. $\frac{b}{a}$.

В. $-\frac{b}{a}$.

5. Какому из выражений равно выражение $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x-1} : \frac{1}{x}$?

А. $\frac{x}{x-1}$.

Б. $\frac{2-x}{x-1}$.

В. $\frac{x+1}{x-1}$.

6. Упростите выражение

$$\frac{1}{3-x} \cdot (x^2 - 6x + 9) - (x^2 - 4x + 4) \cdot \frac{1}{2-x}.$$

А. 1.

Б. -1.

В. $2x - 1$.

7. Найдите значение выражения $\frac{a^3 - b^3}{(a^2 - b^2)(a^2 + ab + b^2)} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot \frac{ab}{(a+b)^2}$ при $a = 1,75$, $b = 1,89$.

А. 2,375.

Б. -0,84.

В. 0.

8. Найдите значение выражения $\frac{x^2y^2 - 4y^2}{4xy} \cdot \frac{x^2}{2xy - x^2y}$ при $x = 6$, $y = 1,83$.

А. 2.

Б. 3,83.

В. -2.

❶ — Б А Б В Б А В В

0-7. Степень с целым показателем

Если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$ и $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$,
где n — любое натуральное число.

1. Вычислите:

1) а) 2^{-1} ; б) $1,37^0$; в) $3^{-2} + 3^0 + 3^2$; г) $3 \cdot 2^{-1}$; д) $(3 \cdot 2)^{-1}$.

2) а) 3^{-1} ; в) $2^{-3} + 2^0 + 2^3$; д) $(-2 \cdot 3)^{-1}$.

б) $(-2,437)^0$; г) $-2 \cdot 3^{-1}$;

3) а) $1^{22} + 1^0 + 1^{-22}$; в) $(-1)^{23} + (-1)^0 + (-1)^{-20}$;

б) $10^2 - 10^0 + 10^{-2}$; г) $(-10)^3 - (-10)^0 + (-10)^{-3}$.

- 4) а) $(-2)^{-3}$; б) -2^{-3} ; в) $(-2)^0$; г) -2^0 ; д) $(-2)^{-2}$; е) -2^{-2} .
 5) а) $(-5)^{-1}$; б) -5^{-1} ; в) $(-5)^0$; г) -5^0 ; д) $(-5)^{-2}$; е) -5^{-2} .
 6) а) $3^{-3} + 3^3$; б) $3^{-3} - 3^3$; в) $3^{-3} \cdot 3^3$; г) $3^{-3} : 3^3$.
 7) а) $1^{-3} + 2^{-3}$; б) $1^{-32} - 2^{-3}$; в) $1^0 \cdot 2^{-3}$; г) $1^{-5} : 2^{-3}$.

2. Сравните с нулем число:

- а) 2^{-2} ; б) $(-2)^{-2}$; в) -3^{-2} ; г) -2^{-3} ; д) 13^0 .

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = 1 : \frac{a}{b} = 1 \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$$

3. Вычислите:

- а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$; б) $(0,25)^{-1}$; в) $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-1}$; г) $(2,1)^{-1}$.

4. Замените данное выражение равным выражением, не содержащим отрицательного показателя степени:

- 1) а) a^{-2} ; б) x^{-3} ; в) $a^{-2} \cdot x^{-3}$; г) $a^{-2} + x^{-3}$; д) $a^{-2} : x^{-3}$.
 2) а) c^{-4} ; б) d^{-1} ; в) $c^{-4} \cdot d^{-1}$; г) $c^{-4} - d^{-1}$; д) $c^{-4} : d^{-1}$.
 3) а) a^{-1} ; б) $a^{-1} \cdot b$; в) $a \cdot b^{-1}$; г) $a^{-1} \cdot b^{-1}$; д) $a^{-1} + b^{-1}$.
 4) а) x^{-2} ; б) $2x^{-2}$; в) $(2x)^{-2}$; г) $2 + x^{-2}$; д) $(2 + x)^{-2}$.
 5) а) m^{-1} ; в) $(-3m)^{-1}$; д) $(-3 - m)^{-1}$.
 б) $-3 \cdot m^{-1}$; г) $-3 - m^{-1}$.
 6) а) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-1}$; в) $\left(\frac{ab}{a-b}\right)^{-1}$; д) $\left(a - \frac{1}{a}\right)^{-1}$.
 б) $\left(\frac{x+y}{x}\right)^{-1}$; г) $\left(1 + \frac{1}{a}\right)^{-1}$.

5. Замените дробь произведением:

- 1) а) $\frac{2}{x^3}$; б) $\frac{-3}{a^4}$; в) $\frac{x}{a^{-3}}$; г) $\frac{x^{-1}}{a^3}$; д) $\frac{2}{a+b}$.
 2) а) $\frac{3}{a^2}$; б) $\frac{-2}{x^5}$; в) $\frac{a^2}{b^{-3}}$; г) $\frac{a^{-2}}{p^3}$; д) $\frac{x}{x+y}$.

6. Заполните таблицу по образцу.

n	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
10^n				0,01				100			

Сравните число нулей в изображении степени числа 10 с модулем показателя. Сравните расположение нулей относительно 1 в зависимости от знака показателя.

7. Запишите степень числа 10 в виде натурального числа или десятичной дроби:

- 1) а) 10^{-2} ; б) 10^2 ; в) 10^{-6} ; г) 10^6 .
2) а) 10^{-1} ; б) 10^1 ; в) 10^{-7} ; г) 10^7 .
3) а) 10^{-4} ; б) 10^0 ; в) 10^4 .

8. Запишите число в виде степени числа 10:

- 1) а) 0,0001; б) 10 000; в) 0,0000001; г) 1 000 000.
2) а) 1; б) 0,1; в) 1000; г) 0,00001.

9. Запишите число в стандартном виде:

- 1) а) 380; д) 0,00038;
б) 0,038; е) $\frac{1}{8}$;
в) 38; ж) $34\frac{4}{25}$.
г) 3,8;
2) а) 4600; д) 0,0046;
б) 0,46; е) $11\frac{2}{5}$;
в) 4,6; ж) $16\frac{7}{40}$.
г) 46;

10. Вычислите и запишите результат в стандартном виде:

- а) $12\frac{3}{4} - \frac{5}{6} \cdot 1,2$; б) $\left(12\frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right) \cdot 1,2$.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

11. Вычислите:

- 1) а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$; б) $\left(\frac{2}{8}\right)^{-2} \cdot \left(2\frac{1}{2}\right)^{-2}$; в) $-9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$; г) $-9 \cdot \frac{2^{-1}}{3}$.
2) а) $(2,5)^{-1} - (1,25)^{-1}$; в) $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right)^{-1} : \left(3\frac{1}{3}\right)^{-2}$;
б) $(0,25)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$; г) $-3^0 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} + (0,5)^{-2}$.

12. Упростите выражение. Убедитесь, что ваш ответ есть среди вариантов ответа, приведенных ниже:

а) $(a^{-1} + b^{-1})(a + b)^{-1}$;

б) $(x^{-2} - y^{-2})(x - y)^{-2} : (xy)^{-2}$;

в) $((a + 1)^{-1} - (a - 1)^{-1}) : (1 - a^2)^{-1}$;

г) $(x^{-3} - y^{-3}) \left(\frac{x^2 + xy + y^2}{x^3 y^3} \right)^{-1}$;

д) $(c^{-2} + 2(cd)^{-1} + d^{-2})(c + d)^{-1}$;

е) $(c^{-3} + d^{-3}) : (c^2 - cd + d^2) : (c^{-2} \cdot d^{-3})$.

Варианты ответа: $\frac{x+y}{y-x}$; ab ; $\frac{c+d}{c^2 d^2}$; $\frac{1}{ab}$; $y - x$; 2; $\frac{c+d}{cd}$; -2.

13. Дано: $a^{-1} = \frac{3}{5}$. Найдите:

а) $a + a^{-1}$; б) $a \cdot a^{-1}$; в) $a - 5a^{-1}$; г) $a - a^0$.

О-8. Свойства степени с целым показателем

1. Докажите равенство, используя определение степени с нулевым и целым отрицательным показателями и свойства степени с натуральным показателем:

1) а) $a^{-2} \cdot a^{-3} = a^{-5}$; г) $a^{-6} \cdot a^4 = a^{-2}$;

б) $x^3 \cdot x^{-5} = x^{-2}$; д) $a^3 \cdot a^0 = a^3$.

в) $m^{-4} \cdot m^0 = m^{-4}$;

2) а) $a^5 : a^9 = a^{-4}$; г) $a^{-3} : a^0 = a^{-3}$;

б) $x^3 : x^{-3} = x^6$; д) $a^0 : a^5 = a^{-5}$.

в) $m^{-2} : m^{-5} = m^3$;

3) а) $(a^2)^{-3} = a^{-6}$; г) $(m^0)^3 = m^0$;

б) $(x^{-3})^2 = x^{-6}$; д) $(m^{-4})^0 = m^0$.

в) $(x^{-5})^{-2} = x^{10}$;

4) а) $(ab)^{-3} = a^{-3} \cdot b^{-3}$; в) $(cd)^0 = c^0 \cdot d^0$;

б) $\left(\frac{m}{n}\right)^{-2} = \frac{m^{-2}}{n^{-2}}$; г) $\left(\frac{x}{y}\right)^0 = \frac{x^0}{y^0}$.

2. Упростите выражение, используя свойства степени с целым показателем:

1) а) $x^{-2} \cdot x^{-4}$; б) $x^{-2} : x^{-4}$; в) $(x^{-2})^{-4}$; г) $x^{-4} \cdot x^{-2}$.

2) а) $3\frac{1}{3}a^{-5} \cdot 0,3a^4$; б) $\frac{5,2a^3}{0,4a^{-2}}$; в) $(0,1 \cdot a^{-2})^2$; г) $\frac{(a^{-3})^{-2}}{a^2 \cdot a^5}$.

3) а) $(a^{-2})^3 \cdot (a^{-5})^{-1}$; б) $\frac{(m^{-3})^4}{(m^5)^{-2}}$; в) $2m^2 \cdot 5m^{-3}$; г) $(2m^2 \cdot 5m)^{-3}$.

3. Представьте выражение в виде произведения, один из множителей которого равен a^2 ($a \neq 0$):

a^6 ; a^2 ; a ; a^{-2} ; a^{-6} ; a^n ; a^{n-2} , где n — целое число.

4. Представьте выражение в виде степени выражения a^2 ($a \neq 0$):

a^6 ; a^{10} ; a^{-2} ; a^{-6} ; a^{-10} ; a^{2k} , где k — целое число.

5. Вынесите за скобки степень с наименьшим показателем. Сделайте проверку:

а) $a^5 + a^3 + a^2$; г) $a^{-1} + a^{-2} - a^{-3}$;

б) $3a^7 - 6a^5 - 2a^3$; д) $1 - a^{-2}$.

в) $2a - 3a^{-1}$;

6. Докажите равенство, используя определения степени с отрицательным и нулевым показателями и свойство степени с натуральным показателем (m и n — натуральные числа, $a \neq 0$):

а) $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m + (-n)}$; в) $a^{-m} : a^{-n} = a^{-m - (-n)}$;

б) $(a^m)^{-n} = a^{m(-n)}$; г) $(a^{-m})^{-n} = a^{-m(-n)}$.

7. Вычислите и запишите ответ в стандартном виде:

а) $(9,2 \cdot 10^{-6}) \cdot (1,5 \cdot 10^4)$; б) $\frac{1,2 \cdot 10^{-3}}{2,4 \cdot 10^{-6}}$; в) $(3,5 \cdot 10^3)^2$.

8. Запишите числа 2 и $\frac{1}{2}$; 4 и $\frac{1}{4}$; 8 и $\frac{1}{8}$; 16 и $\frac{1}{16}$ в виде степени числа 2, а числа 3 и $\frac{1}{3}$; 9 и $\frac{1}{9}$; 27 и $\frac{1}{27}$; 81 и $\frac{1}{81}$ в виде степени числа 3.

9. Используя результаты задания 8, вычислите:

1) а) $\frac{2^3 \cdot 4^{-2} \cdot 8^0}{8^{-3} \cdot 16^2}$; в) $\frac{3^{-3} \cdot 27^2}{81^{-1} \cdot 9^3}$;

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} \cdot 4^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{-3} \cdot 16^{-5} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^0$; г) $\left(\frac{1}{27}\right)^2 \cdot 9^{-3} \cdot \left(\frac{1}{81}\right)^2 \cdot 3^{21}$.

2) а) $-5^0 \cdot 25^3 \cdot 125^{-2}$; б) $\frac{-5^6 \cdot 125^{-9}}{25^{-12}}$.

3) а) $\frac{12^{-3} \cdot 18^2}{4^{-2} \cdot 9}$; б) $\frac{15^{-4} \cdot 25^4}{27^{-1} \cdot 75}$.

10. Сократите дробь:

а) $\frac{a^3 + a^2}{a^5 + a^4}$; б) $\frac{a^{-3} - a^{-2}}{a^{-5} - a^{-4}}$.

Проверь себя!

1. Найдите значение выражения $-2^0 + 2^{-3} + 2^4$.

А. $15\frac{1}{8}$.

Б. $17\frac{1}{8}$.

В. $14\frac{7}{8}$.

2. Поставьте знак «>», «<» или «=» вместо многоточия:
 $-3^{-2} \dots 3^{-2}$.

А. =.

Б. <.

В. >.

3. Замените выражение $-2ab^{-2}$ равным ему выражением, не содержащим отрицательных показателей.

А. $\frac{1}{4a^2b^2}$.

Б. $\frac{2a}{b^2}$.

В. $\frac{-2}{a^2b^2}$.

4. Упростите выражение $(x^{-1} - y^{-1}) \cdot (x - y)^{-1}$.

А. $(x - y)^{-2}$.

Б. $\frac{1}{xy}$.

В. $-\frac{1}{xy}$.

5. Запишите число 0,00054 в стандартном виде.

А. $5,4 \cdot 10^{-4}$.

Б. $5,4 \cdot 10^{-5}$.

В. $54 \cdot 10^{-5}$.

6. Найдите произведение $a \cdot b$ и запишите его в стандартном виде, если $a = 5,6 \cdot 10^{-2}$, $b = 2,5 \cdot 10^4$.

А. $14 \cdot 10^2$.

Б. $1,4 \cdot 10^3$.

В. $1,4 \cdot 10^2$.

7. Упростите выражение $\frac{(a^{-3})^{-2} \cdot a^{-9}}{(a^3)^{-4} \cdot a^5}$.

А. a^{-1} .

Б. a .

В. 1.

8. Вычислите: $-3^0 + 5^{-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} + 2 \cdot 2^{-1}$.

А. -1,3.

Б. -2,05.

В. 0,7.

 А Б Б В А Б В А

О-9. Решение уравнений и задач

1. Решите уравнение:

1) а) $3(x - 4) = -5(x + 2)$;

б) $1 - 2(x - 2) = x - (4x + 5)$;

в) $\frac{x+3}{16} = \frac{1}{4}$;

г) $\frac{x-8}{9} + 1 = \frac{x}{3}$;

д) $\frac{2x-5}{7} - 3 = x$.

2) а) $-6(x + 1) = 4(x - 2)$;

б) $x - (3x - 7) = 2 - 5(x + 2)$;

в) $\frac{x-7}{12} = \frac{1}{3}$;

г) $2 + \frac{8-x}{4} = \frac{-1+x}{8}$;

д) $\frac{3x-2}{7} - 2 = x$.

2. Найдите корни уравнения среди чисел 0,7; -1; $1\frac{1}{3}$; 1; -2; 2:

1) а) $0,1x - 0,4(x - 3) = 0,6x$;

б) $-0,2(x + 1) + 0,37 = 0,1(x - 0,4)$.

2) а) $-0,2(x - 2) + 0,8(x - 4) = 0,1(x + 4) - 0,9(x + 2)$;

б) $0,32(1 - x) - 0,7(x + 4) = -0,44$.

3. Решите задачу с помощью уравнения, обозначив буквой величину, о которой спрашивается в задаче. Затем можете решить задачу другим способом:

а) Расстояние между городами скорый поезд, идущий со скоростью 90 км/ч, проходит на 1,5 ч быстрее товарного поезда, который идет со скоростью 60 км/ч. Каково расстояние между городами?

б) Ученику и мастеру дано задание изготовить одинаковое количество деталей. Мастер, изготавливая по 18 деталей в час, затратил на выполнение задания на 3 ч меньше, чем ученик, так как ученик за 1 ч изготавливал лишь 12 деталей. Сколько деталей им было заказано?

в) Два прямоугольника имеют одинаковую площадь. Длина одного из них 8 см, другого 12 см. Ширина первого на 2 см больше ширины второго. Какова ширина второго прямоугольника?

г) За печенье и конфеты покупатель заплатил поровну. Конфеты он купил по цене 36 р. за 1 кг, а печенье — по цене 24 р. за 1 кг, но конфет он купил на 0,1 кг меньше, чем печенья. Сколько конфет купил покупатель?

д) Из двух городов, расстояние между которыми по шоссе 20 км, выехали одновременно в одном направлении две машины: первая со скоростью 72 км/ч, вторая со

скоростью 54 км/ч. Первая машина догнала вторую. Сколько километров успела проехать вторая машина?

в) Два велосипедиста участвовали в соревнованиях. Вторым стартовал позже первого на 6 мин, но пришел на финиш одновременно с первым. Какова длина трассы, если скорость одного велосипедиста 18 км/ч, а другого 20 км/ч?

ж) Куплена ткань двух видов по цене 360 р. за 1 м и 450 р. за 1 м. Ткани второго вида куплено на 6,5 м меньше, чем ткани первого вида, а ее стоимость составляет 60% стоимости ткани первого вида. Сколько куплено ткани второго вида?

з) На строительстве железной дороги работали две бригады. Первая бригада ежедневно прокладывала на 40 м путей больше, чем вторая бригада. Первая бригада работала 8 дней, вторая — 10 дней. Оказалось, что они выполнили одинаковую работу. Какой длины путь прокладывала первая бригада ежедневно?

и) Хозяйка потратила на ремонт квартиры некоторую сумму денег. 5% всех денег она потратила на обои, 30% оставшихся денег она потратила на покупку клея, краски и прочих материалов. Оставшиеся 32 500 р. она заплатила рабочим. Сколько денег хозяйка потратила на ремонт квартиры?

4. Решите уравнение:

1) а) $\frac{2x-1}{12} - 2 = \frac{3x+16,5}{18} - \frac{x-3,5}{8};$

б) $0,2(0,3 - x) - 0,7(x - 0,1) = 0,5(0,2x - 0,3).$

2) а) $\frac{\frac{2}{3}x-5}{2} - \frac{x-\frac{1}{2}}{3} = \frac{2x+1}{9};$

б) $-\frac{2}{7}(x - 0,2) + \frac{3}{14}(x + 0,1) = -\frac{5}{7}(x - 1,1).$

3) $-2(x - 7) + 3(a - 2) = 4$ при $a = 2$, $a = -3$, при любом значении a .

5. а) Моторный катер прошел по течению реки такое же расстояние, как и против течения, затратив на путь по течению 1,5 ч, а против течения 2,5 ч. Скорость течения реки 2 км/ч. Какое расстояние прошел катер за все время?

б) Турист вышел с турбазы к железнодорожной станции. Если он будет идти со скоростью 3 км/ч, то опоз-

дает к поезду на 10 мин, а если он будет идти со скоростью 4 км/ч, то придет за 10 мин до отхода поезда. Каково расстояние от турбазы до станции?

в) Из города A в город B выехал грузовик со скоростью 40 км/ч, а вслед за ним через 20 мин выехал легковой автомобиль со скоростью 60 км/ч. Легковой автомобиль прибыл в город B на 5 мин позже, чем грузовик. Найдите расстояние между городами A и B .

г) Велосипедист ехал по шоссе со скоростью 15 км/ч и свернул на проселочную дорогу, где скорость его снизилась на 3 км/ч. По проселочной дороге он проехал на 9 км меньше, чем по шоссе. Сколько километров велосипедист проехал по шоссе, если на весь путь он затратил 1,5 ч?

Глава 2. Квадратные корни

О-10. Извлечение квадратного корня

1. Вычислите:

1) а) $\sqrt{25}$; в) $\sqrt{250\,000}$; д) $1 - \sqrt{\frac{25}{81}}$;

б) $\sqrt{81}$; г) $2\sqrt{0,81}$; е) $\sqrt{\frac{81}{2500}}$.

2) а) $\sqrt{36}$; в) $\frac{1}{3}\sqrt{3600}$; д) $1 + \sqrt{\frac{36}{49}}$;

б) $\sqrt{49}$; г) $\sqrt{0,49}$; е) $\sqrt{\frac{49}{3600}}$.

3) а) $\sqrt{9 + 16}$; б) $\sqrt{4 \cdot 9 + 64}$; в) $\sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}}$; г) $\sqrt{1 - 0,36}$.

4) а) $\sqrt{25 - 9}$; б) $\sqrt{100 - 9 \cdot 4}$; в) $\sqrt{1 - \frac{16}{25}}$; г) $\sqrt{0,36 + 0,64}$.

2. Проверьте, что $\sqrt{196} = 14$; $\sqrt{225} = 15$; $\sqrt{256} = 16$ и $\sqrt{289} = 17$ и, используя эти равенства, вычислите:

1) а) $\sqrt{1,96}$; б) $\sqrt{0,0289}$; в) $\frac{3}{4}\sqrt{25\,600}$; г) $\sqrt{225} + \sqrt{2,25}$.

2) а) $\sqrt{2,89}$; б) $\frac{2}{7}\sqrt{19\,600}$; в) $\sqrt{\frac{196}{225}}$; г) $\sqrt{2,56} - \sqrt{2,25}$.

3. Вычислите:

1) а) $\sqrt{289 - 225}$; б) $\sqrt{0,64 + 2,25}$; в) $\sqrt{\frac{4}{9} \cdot 81 + 64}$.

2) а) $\sqrt{8^2 + 15^2}$; б) $\sqrt{15^2 - 12^2}$; в) $\sqrt{\frac{289 - 64}{49}}$.

4. Найдите значение выражения для заданных значений переменных:

1) При $x = 16$, $y = 9$:

а) $\sqrt{x} + \sqrt{y}$; г) $\frac{1}{2}\sqrt{xy}$; ж) $4\sqrt{y}$;

б) $\frac{1}{2}x \cdot \sqrt{y}$; д) $\sqrt{x} - 7$; з) $\sqrt{4y}$.

в) $\sqrt{x + y}$; е) $\sqrt{x - 7}$;

2) При $a = -3$, $b = 3$, $c = 2,5$:

а) $\sqrt{7 - 3a}$; б) $\sqrt{4c - 3b}$; в) $\sqrt{a^2 + 3b^2}$; г) $\sqrt{\frac{2c - 7a}{6,5}}$.

5. Вычислите:

а) $\sqrt{113^2 - 112^2}$; г) $\sqrt{2,6^2 - 2 \cdot 2,6 \cdot 1,9 + 1,9^2}$;

б) $\sqrt{13^2 + 2 \cdot 13 \cdot 7 + 7^2}$; д) $\sqrt{\sqrt{256}}$.

в) $\sqrt{\frac{33^2 - 31^2}{2}}$;

6. Подберите ответы, сделайте проверку:

$\sqrt{900}$; $\sqrt{961}$; $\sqrt{1600}$; $\sqrt{1089}$; $\sqrt{3600}$; $\sqrt{4900}$; $\sqrt{4225}$;
 $\sqrt{10\,000}$; $\sqrt{15876}$.

7. Найдите значение выражения при данном значении переменной:

а) $\sqrt{a^2 + 9a}$ при $a = 16$; в) $\sqrt{\sqrt{5m + 27}}$ при $m = -2,2$.

б) $\sqrt{\frac{36x^2}{x^2 - 5}}$ при $x = 3$;

8. Найдите a , если:

а) $\sqrt{a} = 25$; б) $\sqrt{a} = 0,4$; в) $\sqrt{a + 2} = 5$; г) $\sqrt{a - 5} = 0,7$.

9. Выразите x через a , если $x > 0$:

а) $a = \sqrt{2x}$; б) $a = \sqrt{x + 2}$; в) $x^2 = a^2 + 4$; г) $2x^2 - 5 = a$.

О-11. Иррациональные числа

1. Рациональным или иррациональным является число:

- 1) а) $\sqrt{0,49}$; в) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$;
б) $\sqrt{21}$; г) $\sqrt{9^2 - 1}$?
- 2) а) $\sqrt{33}$; в) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$;
б) $\sqrt{0,64}$; г) $\sqrt{7^2 + 1}$?

2. Между какими двумя соседними натуральными числами заключено число:

- 1) а) $\sqrt{10}$; б) $\sqrt{45,3}$; в) $\sqrt{104}$?
- 2) а) $\sqrt{22}$; б) $\sqrt{60,7}$; в) $\sqrt{110}$?

3. Сравните числа:

- 1) а) $\sqrt{22}$ и $\sqrt{24}$; г) $\sqrt{11,2}$ и $\sqrt{11\frac{1}{7}}$;
б) $\sqrt{37}$ и 6; д) $\sqrt{7^2 + 3^2}$ и $\sqrt{7^2} + \sqrt{3^2}$.
в) $\sqrt{0,5}$ и 0,7;
- 2) а) $\sqrt{34}$ и $\sqrt{32}$; г) $\sqrt{10,3}$ и $\sqrt{10\frac{1}{3}}$;
б) $\sqrt{26}$ и 5; д) $\sqrt{7^2 - 3^2}$ и $\sqrt{7^2} - \sqrt{3^2}$.
в) $\sqrt{0,6}$ и 0,8;

4. Выясните, рациональным или иррациональным является число:

- а) $\sqrt{\sqrt{4}}$; б) $\sqrt{\sqrt{81}}$; в) $\sqrt{\sqrt{5\frac{1}{16}}}$; г) $\sqrt{\sqrt{15^2 + 8^2}}$.

5. Проверьте, что:

- а) $0,6 < \sqrt{0,4} < 0,7$; в) $1,2 < \sqrt{1,6} < 1,3$;
б) $0,9 < \sqrt{0,9} < 1$; г) $2,1 < \sqrt{4,5} < 2,2$.

6. Установите, между какими соседними натуральными числами заключено число:

- а) $\sqrt{5} + 4$; г) $\sqrt{8^2 + 5^2}$;
б) $\sqrt{10} - 2$; д) $\sqrt{10^2 - 4^2}$.
в) $\sqrt{20} + \sqrt{30}$;

О-12. Решение уравнений вида $x^2 = a$

1. Решите уравнение:

- 1) а) $x^2 = 4$; д) $(3x - 7)^2 = 121$;
б) $x^2 = 17$; е) $(2x - 5)(2x + 5) = 75$;
в) $x^2 = 0,09$; ж) $x^2 + 9 = 0$;
г) $2x^2 = 0,08$; з) $x(x - 2) = -2x$.
- 2) а) $x^2 = 100$; д) $(4x - 9)^2 = 49$;
б) $x^2 = 13$; е) $(3x - 2)(3x + 2) = 5$;
в) $x^2 = \frac{9}{16}$; ж) $x^2 + 15 = 0$;
г) $3x^2 = 0,48$; з) $x(x + 3) = 3x$.
-

2. Решите уравнение:

- а) $(2x - 1)^2 = (x - 5)(x + 5) - (4x - 53)$;
б) $(2x - 3)(x + 1) - (1 - x) = 0$;
в) $\frac{x-1}{4} = \frac{9}{x-1}$;
г) $\frac{3}{1-4x} = \frac{1-4x}{27}$;
д) $3x(x - 2) + 2x(x + 3) = 0$;
е) $(x - 7)(x + 2) + 5(x + 9) = 0$.

3. Докажите, что:

- а) $\sqrt{2}$ — корень уравнения $2(x^2 - 1) = 6x - 3\left(2x - \frac{2}{3}\right)$;
б) $-\sqrt{3}$ — корень уравнения
$$\frac{2}{5}(8 - x^2) = -10x + \frac{1}{5}(50x + 10).$$

4. Решите уравнение:

- а) $x^2 = a^2 + 9$ при $a = -3$, $a = 5$, любом значении a ;
б) $2x^2 - 5 = a$ при $a = -3$, $a = 5$, любом положительном значении a .

О-13. Свойства квадратного корня

1. Вычислите:

- 1) а) $\sqrt{25 \cdot 9}$; г) $\sqrt{\frac{169}{25}}$; е) $\sqrt{0,81 \cdot \frac{4}{25}}$;
б) $\sqrt{0,04 \cdot 81}$; д) $\sqrt{\frac{0,64 \cdot 49}{25}}$; ж) $3(\sqrt{2})^2 - \frac{1}{3}(\sqrt{3})^2$.
в) $\sqrt{36 \cdot 0,09 \cdot 25}$;

- 2) а) $\sqrt{16 \cdot 81}$; д) $\sqrt{\frac{0,09 \cdot 169}{225}}$;
 б) $\sqrt{1,21 \cdot 25}$; е) $\sqrt{0,16 \cdot \frac{9}{49}}$;
 в) $\sqrt{64 \cdot 0,49 \cdot 25}$; ж) $-\frac{2}{5}(\sqrt{5})^2 + 5(\sqrt{7})^2$.
 г) $\sqrt{\frac{144}{121}}$;

2. Представьте данную степень в виде квадрата по образцу

$$x^{28} = (x^{14})^2;$$

- а) 3^{28} ; б) 5^{14} ; в) 9^6 ; г) 2^{76} ; д) 2^{-8} ; е) 2^{-16} .

3. Вычислите:

- 1) а) $\sqrt{2^8}$; в) $\sqrt{5^4}$; д) $\sqrt{2^8 \cdot 5^6}$;
 б) $\sqrt{3^6}$; г) $\sqrt{3^4 \cdot 2^6}$; е) $\sqrt{\frac{2^{10}}{3^3 \cdot 5^4}}$.
 2) а) $\sqrt{3^4}$; в) $\sqrt{10^6}$; д) $\sqrt{5^4 \cdot 2^8}$;
 б) $\sqrt{2^{10}}$; г) $\sqrt{3^6 \cdot 2^4}$; е) $\sqrt{\frac{2^{10}}{3^4 \cdot 5^2}}$.
 3) а) $\sqrt{2,5 \cdot 10}$; в) $\sqrt{0,08 \cdot 4,5}$;
 б) $\sqrt{50 \cdot 98}$; г) $\sqrt{75 \cdot 27}$.
 4) а) $\sqrt{10 \cdot 3,6}$; в) $\sqrt{0,18 \cdot 2}$;
 б) $\sqrt{8 \cdot 98}$; г) $\sqrt{12 \cdot 27}$.
 5) а) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{22} \cdot \sqrt{11}$; в) $\sqrt{60} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$;
 б) $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$; г) $\sqrt{1\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{13}{25}} : \sqrt{\frac{13}{3}}$.
 6) а) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{33} \cdot \sqrt{11}$; в) $\sqrt{90} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$;
 б) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$; г) $\sqrt{1\frac{1}{5}} : \sqrt{\frac{6}{7}} \cdot \sqrt{\frac{5}{7}}$.
 7) а) $\left(\sqrt{15} - \sqrt{\frac{20}{3}}\right) \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}$; б) $\frac{\sqrt{50}}{2\sqrt{2}} - 10,3$; в) $(\sqrt{45} + \sqrt{20}) : \sqrt{5}$.
 8) а) $\left(\sqrt{6} + \sqrt{\frac{8}{3}}\right) \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$; б) $10,3 - \frac{\sqrt{27}}{2\sqrt{3}}$; в) $(\sqrt{63} - \sqrt{28}) : \sqrt{7}$.

4. Вынесите множитель за знак корня по образцу

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3};$$

- 1) а) $\sqrt{12}$; в) $\sqrt{500}$; д) $\sqrt{44}$; ж) $\sqrt{3^{-6} \cdot 2}$.
б) $\sqrt{28}$; г) $\sqrt{54}$; е) $\sqrt{5^4 \cdot 7}$;
2) а) $\sqrt{18}$; в) $\sqrt{600}$; д) $\sqrt{120}$; ж) $\sqrt{2^{-6} \cdot 3}$.
б) $\sqrt{24}$; г) $\sqrt{99}$; е) $\sqrt{7^4 \cdot 5}$;

5. Внесите множитель под знак корня по образцу

$$2\sqrt{5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{20} \text{ и} \\ -3\sqrt{2} = -\sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{9 \cdot 2} = -\sqrt{18};$$

- 1) а) $4\sqrt{2}$; б) $-3\sqrt{5}$; в) $\frac{2}{3}\sqrt{63}$; г) $-\frac{1}{2}\sqrt{8}$; д) $4\sqrt{2,5}$.
2) а) $5\sqrt{2}$; б) $-7\sqrt{2}$; в) $\frac{4}{5}\sqrt{75}$; г) $-\frac{1}{3}\sqrt{27}$; д) $2\sqrt{3,5}$.

6. Сравните числа:

- 1) а) $\sqrt{3,6}$ и $\sqrt{3}$; г) $5\sqrt{2}$ и $4\sqrt{3}$;
б) 7 и $4\sqrt{3}$; д) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{9}$ и $\sqrt{18} \cdot \sqrt{3}$.
в) $2,8\sqrt{7}$ и $\sqrt{63}$;
2) а) $\sqrt{4,8}$ и $\sqrt{5}$; г) $3\sqrt{3}$ и $2\sqrt{7}$;
б) 5 и $2\sqrt{6}$; д) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}}$ и $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{18}}$.
в) $\sqrt{45}$ и $3,2\sqrt{5}$;

7. Расположите числа в порядке возрастания:

- 1) а) 11, $5\sqrt{5}$, $2\sqrt{30}$; в) $-\frac{2}{3}\sqrt{17}$, $\frac{1}{2}\sqrt{14}$, $-2\sqrt{0}$.
б) $-8\sqrt{5}$, $-4\sqrt{3}$; $-2\sqrt{11}$;
2) а) 10, $7\sqrt{2}$, $4\sqrt{6}$; в) $-\frac{5}{7}\sqrt{23}$, $2\sqrt{4,5}$, $-\frac{2}{3}\sqrt{0}$.
б) $-2\sqrt{14}$, $-3\sqrt{6}$, $-2\sqrt{13}$;

8. Найдите значение выражения:

- а) $0,3xy + 0,8xy$ при $x = 10\sqrt{3}$, $y = \sqrt{6}$;
б) $\frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{3}$ при $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$\text{в)} -\frac{2x}{3y} + \frac{3x}{2y} \text{ при } x = 12\sqrt{6}, y = 5\sqrt{2};$$

$$\text{г)} 2x^3 - 5x^3 \text{ при } x = 2\sqrt{2}.$$

9. Вычислите:

$$\text{а)} \sqrt{24} \cdot \sqrt{1\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{0,1};$$

$$\text{д)} \sqrt{2,8 \cdot 10^{-3}} \cdot \sqrt{7 \cdot 10^6};$$

$$\text{б)} 2\sqrt{35} : \sqrt{1\frac{3}{4}} : \sqrt{5};$$

$$\text{е)} (2\sqrt{3})^2 - \left(\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}}\right)^2 + (\sqrt{7} \cdot \sqrt{3})^2;$$

$$\text{в)} \left(\sqrt{3} + \sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cdot \sqrt{12};$$

$$\text{ж)} (\sqrt{3})^3 \cdot \sqrt{75} - \frac{(2\sqrt{7})^3}{\sqrt{63}};$$

$$\text{г)} \sqrt{4,5 \cdot 10^5} \cdot \sqrt{2 \cdot 10^7};$$

$$\text{з)} (\sqrt{5})^{-2} : \sqrt{20} : (\sqrt{125})^{-1}.$$

10. Если a , b , c — длины сторон треугольника и $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр этого треугольника, то его площадь можно вычислить по формуле

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Вычислите S , если:

$$\text{а)} a = 13 \text{ см}, b = 14 \text{ см}, c = 15 \text{ см};$$

$$\text{б)} a = 19,5 \text{ см}, b = 21 \text{ см}, c = 22,5 \text{ см}.$$

11. Вынесите множитель за знак корня:

$$\text{а)} \sqrt{162}; \quad \text{г)} \sqrt{(-13)^2 \cdot 5};$$

$$\text{б)} \sqrt{192}; \quad \text{д)} \sqrt{(-12)^3 \cdot (-60)};$$

$$\text{в)} \sqrt{882}; \quad \text{е)} \sqrt{a^2 b^4}.$$

12. Сравните числа:

$$\text{а)} \frac{1}{3\sqrt{3}} \text{ и } \frac{\sqrt{7}}{14};$$

$$\text{б)} -\frac{1}{2\sqrt{13}} \text{ и } \frac{1}{3\sqrt{6}};$$

$$\text{в)} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} \text{ и } \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{12}};$$

$$\text{г)} \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} : \sqrt{\frac{2}{5}} \text{ и } (-\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3,5}.$$

О-14. Преобразование выражений, содержащих квадратные корни

1. Упростите выражение:

- 1) а) $2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$;
б) $3\sqrt{5} - 5\sqrt{5}$;
в) $2\sqrt{7} + 13\sqrt{7} - 10\sqrt{7}$;
г) $\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$;
д) $\frac{4}{7}\sqrt{5} + \frac{2}{5}\sqrt{13} - \frac{1}{14}\sqrt{5} + \frac{3}{5}\sqrt{13}$;
е) $\frac{2}{7}(\sqrt{7} - 7) - \frac{5}{7}(14 - \sqrt{7})$.
2) а) $4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$;
б) $7\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$;
в) $5\sqrt{11} - 12\sqrt{11} + 8\sqrt{11}$;
г) $\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 5\sqrt{3} + 12\sqrt{2}$;
д) $\frac{2}{3}\sqrt{11} + \frac{4}{7}\sqrt{7} - \frac{1}{9}\sqrt{11} + \frac{3}{7}\sqrt{7}$;
е) $\frac{2}{3}(\sqrt{5} - 3) - \frac{1}{3}(6 - \sqrt{5})$.

2. Выполните действия:

- 1) а) $(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)$;
б) $(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 2)$;
в) $(\sqrt{5} + 2)^2$;
г) $(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} + 1) - (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} - 1)$.
2) а) $(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 1)$;
б) $(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)$;
в) $(\sqrt{3} - 2)^2$;
г) $(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} + 1) - (\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} - 1)$.

3. Упростите выражение и ответ представьте в виде $\sqrt{a}$:

- 1) а) $\sqrt{18} + \sqrt{200}$; г) $\sqrt{54} - \sqrt{72} : \sqrt{3}$;
б) $\sqrt{300} - \sqrt{75}$; д) $\sqrt{28} + \sqrt{63} - \sqrt{112}$;
в) $\sqrt{20} + \sqrt{3 \cdot 15}$; е) $\sqrt{19^2} - \sqrt{(-17)^2}$.

- 2) а) $\sqrt{300} - \sqrt{27}$; г) $\sqrt{135} : \sqrt{3} - \sqrt{20}$;
 б) $\sqrt{200} + \sqrt{98}$; д) $\sqrt{44} + \sqrt{99} - \sqrt{176}$;
 в) $\sqrt{24} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{18}$; е) $\sqrt{23^2} - \sqrt{(-21)^2}$.

4. Зная, что $\sqrt{2} = 1,4142\dots$, $\sqrt{3} = 1,7320\dots$, $\sqrt{5} = 2,236\dots$, $\sqrt{7} = 2,645\dots$, $\sqrt{10} = 3,162\dots$, найдите приближенное значение выражения, округлив его до десятых:

- 1) а) $12\sqrt{3} - \sqrt{12}$; г) $\sqrt{7} - \sqrt{28}$;
 б) $\sqrt{45} - 4\sqrt{5}$; д) $2\sqrt{90} + 3\sqrt{160} - 8\sqrt{40}$.
 в) $\sqrt{2} + 3\sqrt{18} - \sqrt{50}$;
 2) а) $\sqrt{5} - \sqrt{20}$; г) $\sqrt{27} - 4\sqrt{3}$;
 б) $-2\sqrt{2} + \sqrt{18} + \sqrt{162}$; д) $\sqrt{28} - 3\sqrt{7}$.
 в) $\sqrt{10} + \sqrt{40} + \sqrt{490}$;

5. Выполните действия:

а) $\frac{(\sqrt{20} + \sqrt{18}) - (\sqrt{50} - \sqrt{45})}{\sqrt{8} - \sqrt{125}}$; б) $\frac{(\sqrt{80} + \sqrt{72}) - (\sqrt{50} + \sqrt{45})}{2\sqrt{5} + 2\sqrt{2}}$.

6. Освободитесь от иррациональности в знаменателе:

- 1) а) $\frac{3}{\sqrt{5}}$; б) $\frac{6}{\sqrt{3}}$; в) $\frac{6}{5\sqrt{3}}$; г) $\frac{10}{\sqrt{10}}$.
 2) а) $\frac{5}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{3}{\sqrt{6}}$; в) $\frac{3}{5\sqrt{6}}$; г) $\frac{12}{\sqrt{12}}$.

7. Упростите выражение:

- 1) а) $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 3)$; б) $(2 - \sqrt{7})(3 + \sqrt{7}) + \sqrt{7}$.
 2) а) $(\sqrt{5} - 2)(1 - \sqrt{5})$; б) $(7 - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 2) - 5\sqrt{3}$.

8. Вычислите:

а) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{6} + \frac{5\sqrt{2}}{12}$; в) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{9} + \frac{5\sqrt{3}}{18}$;
 б) $\frac{2\sqrt{5} - 1}{2} - \frac{3\sqrt{5} - 4}{3}$; г) $\frac{7 - 4\sqrt{2}}{4} - \frac{5 - 3\sqrt{2}}{3}$.

9. Найдите значение выражения:

- 1) $x^2 - 2x$ при:
 а) $x = 1$; б) $x = \sqrt{3}$; в) $x = 1 + \sqrt{3}$.
 2) $4x - x^2$ при:
 а) $x = -1$; б) $x = \sqrt{2}$; в) $x = \sqrt{2} - 1$.

10. Упростите выражение, где буквами обозначены положительные числа:

1) а) $\sqrt{64m^2}$; б) $\sqrt{9n}$; в) $\sqrt{3a^2}$; г) $\sqrt{\frac{p^2}{9}}$; д) $\sqrt{\frac{2p^2}{9}}$; е) $\frac{6a}{\sqrt{3a^2}}$.

2) а) $\sqrt{100b^2}$; б) $\sqrt{16a}$; в) $\sqrt{5p^2}$; г) $\sqrt{\frac{c^2}{25}}$; д) $\sqrt{\frac{3c^2}{25}}$; е) $\frac{8a}{\sqrt{2a^2}}$.

11. Упростите выражение:

а) $(\sqrt{13} + 3\sqrt{2})(\sqrt{26} - 6)$;

б) $(\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}})^2$;

в) $\frac{\sqrt{12}(\sqrt{15} - 3)}{2\sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{3})}$;

г) $\frac{1}{\sqrt{11} - \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{11} + \sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{11}}{9}$;

д) $\sqrt{242} + \sqrt{288} - \sqrt{338}$.

12. Какое равенство верно:

а) $\sqrt{1024} = 32$; г) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = 1 - \sqrt{3}$;

б) $\sqrt{8,41} = -2,9$; д) $\sqrt{54 - 14\sqrt{5}} = 7 - \sqrt{5}$?

в) $\sqrt{0,9} = 0,3$;

13. Верно ли, что значение выражения $\frac{2x^2 - 3x - 1}{x + 1}$:

а) при $x = 2$ равно 3;

б) при $x = \sqrt{2}$ равно $6\sqrt{2} - 9$;

в) при $x = \sqrt{2} - 2$ равно $6\sqrt{2} - 5$?

14. Вычислите:

а) $\sqrt{13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 17 + 17^2}$;

б) $\sqrt{132^2 - 264 \cdot 496 + 496^2}$;

в) $\sqrt{1,45^2 - 1,44^2}$;

г) $\sqrt{(73^2 - 48^2)(40^2 - 24^2)}$;

д) $\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2(7 + 4\sqrt{3})}$.

15. Упростите выражение:

а) $\frac{\sqrt{5} + 3}{\sqrt{5} - 3} + \frac{\sqrt{5} - 3}{\sqrt{5} + 3} + 8$;

- б) $\frac{\sqrt{a}+3}{\sqrt{a}-3} + \frac{\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}+3} - \frac{a+27}{a-9}$;
 в) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{a+3b}{a-b}$;
 г) $\sqrt{9a} + \sqrt{16a} - \sqrt{25a}$;
 д) $\sqrt{9a^2} + \sqrt{16a^2} - \sqrt{25a^2}$ при $a < 0$.

16. Докажите, что:

- а) $(4 + \sqrt{6})(3\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \sqrt{162} + \sqrt{12}$;
 б) $(\sqrt{5} - 3)^2 - 2(4 - 3\sqrt{5}) = 6$;
 в) $\frac{\sqrt{2}-1}{4} - \frac{3-\sqrt{2}}{6} + \frac{7\sqrt{2}-3}{12} = \sqrt{2} - 1$;
 г) $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Проверь себя!

- Какому из чисел равно значение выражения $\sqrt{0,49}$?
 А. -0,7. Б. 0,7. В. 0,07.
- Вычислите $\sqrt{15^2 + 8^2}$.
 А. 23. Б. -17. В. 17.
- Какой знак надо поставить между числами $4\sqrt{8}$ и $5\sqrt{2}$?
 А. <. Б. =. В. >.
- Какому числу равно значение выражения $\sqrt{50} + \sqrt{98}$?
 А. $\sqrt{148}$. Б. $\sqrt{288}$. В. $\sqrt{208}$.
- Упростите выражение $(2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5})$.
 А. -1. Б. -3. В. 1.
- Вычислите $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}} - \sqrt{12} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{(-13)^2}$.
 А. -16. Б. -10. В. 10.
- Чему равно значение выражения $x^2 - x - 5$ при $x = \sqrt{3} - 1$?
 А. $-\sqrt{27}$. Б. $7 - 3\sqrt{3}$. В. $-2 - \sqrt{3}$.

8. Какое из равенств верно?

А. $\sqrt{1089} = 37$.

В. $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1$.

Б. $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = 1 - \sqrt{3}$.

⊙ Б В А Б А В А В

О-15. Кубический корень

1. Вычислите:

1) а) $\sqrt[3]{1000}$; б) $\sqrt[3]{-0,008}$; в) $\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{-8}$; г) $\sqrt[3]{64} - \sqrt{64}$.

2) а) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$; б) $\sqrt[3]{-125}$; в) $\sqrt[3]{-27} + \sqrt[3]{64}$; г) $\sqrt[3]{\frac{1}{64}} - \sqrt{\frac{1}{64}}$.

3) а) $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{-8}$; в) $\sqrt[3]{0,008} \cdot \sqrt[3]{-0,008}$;

б) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$; г) $\frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{-125}}$.

2. Проверьте, что:

а) $4 < \sqrt[3]{100} < 5$;

в) $5,8 < \sqrt[3]{200} < 5,9$.

б) $3 < \sqrt[3]{30} < 3,2$;

3. Сравните числа:

а) $\sqrt[3]{7}$ и $\sqrt[3]{6,5}$;

г) $\sqrt[3]{26,5 \cdot \frac{2}{3}}$ и $\sqrt[3]{26,5}$;

б) $\sqrt[3]{10}$ и $\sqrt[3]{-15}$;

д) $\sqrt[3]{50}$ и 4;

в) $\sqrt[3]{-2}$ и $\sqrt[3]{-8}$;

е) $\sqrt[3]{-9}$ и -2.

4. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} - \sqrt[3]{\frac{64}{27}} + \sqrt[3]{0,008} - \sqrt[3]{-0,125}$;

б) $\frac{\sqrt[3]{125} - \sqrt{36}}{\sqrt{0,64} - \sqrt[3]{-0,008}}$;

в) $\frac{2}{15}\sqrt[3]{27} - \frac{4}{15}\sqrt[3]{-125}$.

5. При каких значениях a верно равенство:

а) $\sqrt{a} = \frac{2}{3}$;

в) $\sqrt{a} = -2$;

д) $\sqrt{a} = 1$;

ж) $\sqrt{a} = 0$;

б) $\sqrt[3]{a} = \frac{2}{3}$;

г) $\sqrt[3]{a} = -2$;

е) $\sqrt[3]{a} = 1$;

з) $\sqrt[3]{a} = 0$?

6. Найдите значения a , при которых верно равенство $\sqrt{a} = \sqrt[3]{a}$.

7. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{a^2 - a} - \sqrt{8}$ при $a = 2\sqrt{2} + 1$.

8. Используя таблицы кубов и квадратов чисел, вычислите:

а) $2\sqrt[3]{8} + 3\sqrt[3]{125} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{216} - \frac{2}{3}\sqrt[3]{729}$;

б) $\left(-\frac{2}{7}\sqrt[3]{343} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{216}\right) : (\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{-1})$;

в) $(\sqrt{64} - \sqrt[3]{64})(\sqrt{729} - \sqrt[3]{729})$;

г) $\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{8}} - \sqrt{\frac{1}{9}}}{\sqrt[3]{\frac{8}{125}} + \sqrt{\frac{4}{9}}}$;

д) $(\sqrt[3]{7})^3 - 2(\sqrt{2})^2 - 3(\sqrt[3]{-5})^3$.

9. Решите уравнение:

а) $x^2 = 4$;

д) $x^2 = 0$;

б) $x^3 = 8$;

е) $x^3 = 0$;

в) $x^2 = -16$;

ж) $(x - 2)^2 = 9$;

г) $x^3 = -27$;

з) $(x + 3)^3 = 8$.

Глава 3. Квадратные уравнения

О-16. Квадратные уравнения

Уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где a , b и c — числа, причем $a \neq 0$, называется квадратным.

1. Составьте квадратное уравнение по его коэффициентам:

1) а) $a = -3$, $b = 2$, $c = 1$; в) $a = -1$, $b = \frac{1}{3}$, $c = 0$;

б) $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$, $c = \sqrt{8}$; г) $a = 2$, $b = 0$, $c = 0$.

- 2) а) $a = 2, b = 3, c = 4$; в) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{2}{3}, c = 0$;
 б) $a = -1, b = 0, c = \sqrt{2}$; г) $a = -3, b = 0, c = 0$.

2. Заполните таблицу:

Уравнение	Коэффициент		
	a	b	c
$3x^2 + 2x + 4 = 0$			
$-3x^2 + 7x - 4 = 0$			
$\frac{2}{3}x^2 - 2x = 0$			
$x^2 - x + 1 = 0$			
$-x^2 + x - 1 = 0$			
$2x^2 - 9 = 0$			

3. Приведите уравнение к виду $ax^2 + bx + c = 0$:

- 1) а) $(2x - 1)(x - 3) = 0$; г) $(x - 1)^2 = 2x + 4$;
 б) $2x^2 - 3x = 5x - 1$; д) $(3x - 2)^2 = (7 - x)(x + 7) - 45$.
 в) $(x - 2)(x + 2) = 3$;
 2) а) $(3x - 1)(x + 2) = 0$; г) $(x - 2)^2 = -3x + 5$;
 б) $-3x^2 + 4x = -8x + 1$; д) $(5 - x)(x + 5) = (3x + 5)^2$.
 в) $(3 - x)(3 + x) = 2$;

4. Какое из чисел 1; -3 является корнем данного уравнения:

- 1) а) $2y^2 - 3y + 1 = 0$; в) $\frac{1}{2}t^2 + t - 1,5 = 0$;
 б) $-x^2 + 5x - 6 = 0$; г) $25t^2 - 10t + 1 = 0$?
 2) а) $5x^2 - 4x - 1 = 0$; в) $-t^2 + 5t - 6 = 0$;
 б) $-\frac{1}{2}y^2 - y + 1,5 = 0$; г) $9y^2 - 6y + 1 = 0$?

5. Решите уравнение:

- 1) а) $x^2 + 6x + 9 = 0$; б) $25y^2 + 10y + 1 = 0$.
 2) а) $x^2 - 4x + 4 = 0$; б) $16y^2 - 8y + 1 = 0$.
 3) а) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 1 = 0$; б) $\frac{1}{16} + \frac{1}{2}y + y^2 = 0$.

6. Решите уравнение, выделив квадрат двучлена:

1) а) $x^2 - 6x - 8 = 0$; б) $z^2 - 3z - 4 = 0$; в) $t^2 + t - 12 = 0$.

2) а) $y^2 - 8y + 12 = 0$; б) $x^2 + 5x - 14 = 0$; в) $z^2 - z - 20 = 0$.

О-17. Решение квадратных уравнений по формуле корней

1. Вычислите дискриминант квадратного уравнения по формуле $D = b^2 - 4ac$. Определите, имеет ли это уравнение корни и если имеет, то сколько:

1) а) $x^2 - 12x + 7 = 0$; в) $-t^2 + 5t - 9 = 0$;

б) $\frac{1}{2}y^2 - 2y + 2 = 0$; г) $3x^2 - 11x - 1 = 0$.

2) а) $x^2 + 9x + 13 = 0$; в) $-y^2 + 3y - 5 = 0$;

б) $\frac{1}{3}z^2 - 2z + 3 = 0$; г) $2x^2 + 13x + 1 = 0$.

2. Вычислите дискриминант квадратного уравнения по формуле $D = b^2 - 4ac$. Докажите, что оно не имеет решений:

1) а) $x^2 - 5x + 9 = 0$; в) $\frac{1}{2}t^2 - 2t + 8 = 0$.

б) $3x^2 - 7x + 18 = 0$;

2) а) $x^2 + 5x + 9 = 0$; в) $\frac{1}{3}y^2 - y + 3 = 0$.

б) $2t^2 - 5t + 19 = 0$;

3. Вычислите дискриминант квадратного уравнения по формуле $D = b^2 - 4ac$. Убедитесь, что оно имеет единственный корень, и найдите этот корень:

1) а) $x^2 - 8x + 16 = 0$; в) $0,04t^2 - 0,2t + 0,25 = 0$.

б) $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9 = 0$;

2) а) $y^2 + 6y + 9 = 0$; в) $0,01x^2 - 0,4x + 4 = 0$.

б) $\frac{1}{5}x^2 - 2x + 5 = 0$;

4. Вычислите дискриминант квадратного уравнения по формуле $D = b^2 - 4ac$. Убедитесь, что оно имеет два корня, и вычислите их:

1) а) $y^2 - y - 30 = 0$; в) $3t^2 - 5t - 2 = 0$;

б) $x^2 + 2x - 8 = 0$; г) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = 0$.

- 2) а) $x^2 - x - 42 = 0$; в) $5y^2 - 3y - 14 = 0$;
 б) $t^2 - 2t - 15 = 0$; г) $\frac{1}{4}x^2 - x - 3 = 0$.
5. Приведите уравнение к виду $ax^2 + bx + c = 0$ и решите его:
- 1) а) $(x - 2)(x + 3) = 24$; в) $x(x - 1) - 3(x + 2) = -10$.
 б) $(2t - 1)^2 - 4t = 13$;
- 2) а) $(y + 5)(y - 1) = 7$; в) $t(t + 2) - 3(t - 4) = 5t + 3$.
 б) $(3x - 5)^2 + 2x = 5$;
6. Составьте уравнение по условию задачи и решите его:
- а) Сумма квадрата натурального числа t и самого числа t равна 20. Найдите t . Сделайте проверку.
- б) Число p умножили на число, на 2 большее, и получили 48. Найдите p . Сделайте проверку.
- в) От квадрата натурального числа x отняли утроенное число x и получили 10. Найдите x . Сделайте проверку.

7. Докажите, что данное уравнение не имеет решений:
- а) $x^2 + 4 = 0$; г) $(x + 1)^2 + (x - 3)^2 = -3$;
 б) $2t^2 + 1 = 0$; д) $(x - 1)^2 + (x + 3)^2 = 0$.
 в) $x^2 + 2x + 1 = -5$;
8. Решите уравнение:
- а) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$;
 б) $\sqrt{2}x^2 - x - \sqrt{2} = 0$;
 в) $(x^2 + 10x + 25)(3x^2 - 2x - 1) = 0$;
 г) $(5y - y^2 - 4)\sqrt{y} = 0$;
 д) $|x|^2 - 2|x| - 3 = 0$;
 е) $(x^2 - x)^2 - 2(x^2 - x) = 8$;
 ж) $(x + 1)(x^2 + 2x) = 3(x + 1)$.
9. Найдите неизвестный коэффициент уравнения, если известно, что одним из корней уравнения является число 3. Решите полученное уравнение:
- а) $ax^2 - 6x - 27 = 0$;
 б) $3x^2 + bx - 25 = 0$;
 в) $2x^2 - 4x + c = 0$;
 г) $a^2x^2 - (a + 1)x - 27 = 0$.

О-18. Вторая формула корней **квадратного уравнения**

Для уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$ — сокращенный дискриминант.

Если $D_1 \geq 0$, то $x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a}$.

Если $D_1 < 0$, то уравнение не имеет корней.

Решите уравнение (1—3):

1. 1) а) $x^2 - 18x + 77 = 0$;

б) $3x^2 - 16x + 21 = 0$;

в) $3(x^2 - 2) = (x - 5)(x + 1) + 5$;

г) $(2x - 1)^2 - (x - 3)(x + 3) = 2(2x + 3)$;

д) $\frac{x^2}{8} - \frac{x}{6} = 3,5$;

е) $\frac{x^2 - 1}{3} - \frac{2x - 3}{7} = 7$.

2) а) $x^2 - 22x + 72 = 0$;

б) $5x^2 - 18x + 16 = 0$;

в) $4(x^2 - 3) = (x - 1)(x + 7) + 4$;

г) $(2x - 3)^2 - (x - 5)(x + 5) = 2(2x + 7)$;

д) $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{6} = 1,75$;

е) $\frac{x^2 + 2}{8} - \frac{12x - 8}{5} = -2$.

2. 1) а) $x^4 + 8x^2 - 153 = 0$;

б) $x^4 - 15x^2 + 54 = 0$;

в) $x^2(7x^2 - 12) = 64$;

г) $\frac{x^4 + 3}{2} = x^2 + 1$;

д) $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$.

2) а) $x^4 + 10x^2 - 171 = 0$;

б) $x^4 - 11x^2 + 28 = 0$;

в) $9x^4 = 2(7x^2 + 44)$;

г) $x^2 + 1 = \frac{x^4 + 24}{8}$;

д) $x^4 + 17x^2 + 16 = 0$.

3. 1) а) $\frac{5}{8}x^2 = 6x - 25$; г) $7x^2 - 50x + 7 = 0$;
 б) $\frac{25x^2}{6} - \frac{11x}{3} = \frac{1}{2}$; д) $\frac{x^2(x-1)(x+1)}{5} = \frac{7x^2 + 32}{3}$.
 в) $3x^2 + 2\sqrt{7}x - 7 = 0$;
- 2) а) $\frac{3}{4}x^2 = 14x - 75$;
 б) $\frac{23x^2}{10} - \frac{9x}{5} = \frac{1}{2}$;
 в) $5x^2 + 2\sqrt{11}x - 33 = 0$;
 г) $9x^2 - 82x + 9 = 0$;
 д) $\frac{x^2(x-1)(x+1)}{3} = \frac{11x^2 + 21}{5}$.

4. Решите уравнение введением новой переменной и запишите корни в порядке возрастания:

- а) $(x^2 - 2x)^2 - 5x(x - 2) + 6 = 0$;
 б) $(x^2 + 3x - 1)^2 + 6x(x + 3) - 33 = 0$;
 в) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 360$.

У к а з а н и е. Перемножьте первый множитель с четвертым и второй с третьим, а затем введите новую переменную.

- г) $(x - 2)(x + 2)(x + 6)(x + 10) = 144$;
 д) $(x + 2) + \sqrt{x + 2} - 6 = 0$.

О-19. Решение задач

Решите задачу составлением уравнения (1—4):

1. а) Найдите два положительных числа, одно из которых в 2 раза больше другого, а их произведение равно 288.
 б) Найдите два положительных числа, одно из которых на 2 больше другого, а их произведение равно 168.
2. а) Одна из сторон прямоугольника на 1,5 см больше другой, а его площадь 10 см^2 . Найдите стороны этого прямоугольника.
 б) Один из катетов прямоугольного треугольника на 1 см меньше гипотенузы и на 0,5 см меньше другого катета. Найдите стороны этого треугольника.
-
3. а) Найдите три последовательных натуральных числа, такие, что удвоенное произведение крайних чисел на 119 больше квадрата среднего числа.

б) Найдите три последовательных целых числа, если известно, что сумма квадратов первых двух чисел на 140 больше квадрата третьего числа.

в) Найдите три последовательных натуральных числа, такие, что квадрат среднего числа в 5 раз больше разности квадратов двух крайних чисел.

4. а) Изобразите квадрат и прямоугольник, такие, что одна сторона прямоугольника вдвое больше стороны квадрата, а другая сторона прямоугольника на 2 см больше стороны квадрата и разность площадей прямоугольника и квадрата равна 21 см^2 .

б) Изобразите прямоугольник, одна из сторон которого на 3,5 см больше другой, а длина диагонали 6,5 см.

О-20. Неполные квадратные уравнения

В таблице указан один из способов решения неполных квадратных уравнений:

$c = 0$	$b = 0$
$ax^2 + bx = 0$ $x(ax + b) = 0$	$ax^2 + c = 0$ $ax^2 = -c$ $x^2 = -\frac{c}{a}$

1. Решите неполное квадратное уравнение:

- 1) а) $x^2 + 3x = 0$; д) $3x^2 + \sqrt{7} = 0$;
 б) $3y^2 + y = 0$; е) $y^2 - 121 = 0$;
 в) $5z^2 = 3z$; ж) $3x^2 = 0$.
 г) $x^2 - \sqrt{3}x = 0$;
- 2) а) $x^2 - 15x = 0$; д) $x^2 - 49 = 0$;
 б) $15y^2 - y = 0$; е) $5y^2 + \sqrt{8} = 0$;
 в) $3z^2 = -5z$; ж) $-5z^2 = 0$.
 г) $x^2 + \sqrt{2}x = 0$;
- 3) а) $\frac{1}{3}x^2 - 2x = 0$; г) $(x - 1)^2 = 1 - 2(x + 3)$;
 б) $\frac{2}{3}y^2 - 6 = 0$; д) $(2x - 1)(x + 5) = 4(x - 1,25)$;
 в) $-\frac{5}{7}y^2 = 0$; е) $3(x + 2) = x^2 - 2(3 - 1,5x)$;
 ж) $\frac{y^2 - 5y + 1}{2} - \frac{y^2 - 3}{3} = \frac{3}{2}$.

- 4) а) $\frac{1}{2}x^2 + 3x = 0$; г) $(y - 2)^2 = 1 - 4(y + 2)$;
 б) $\frac{3}{2}y^2 - 6 = 0$; д) $(x - 1)(2x + 5) = -4(x + 1,25)$;
 в) $\frac{8}{9}t^2 = 0$; е) $2(x + 3) = x^2 - 2(1 - x)$;
 ж) $\frac{x^2 - 3x + 1}{3} = \frac{x^2 + 8}{2} - \frac{7}{6}$.

2. Решите уравнение:

- 1) а) $\sqrt{12}x^2 - \sqrt{3}x = 0$;
 б) $(x^2 - 2x)(3x^2 - 2x + 1) = 0$;
 в) $(2x^2 - 10)\sqrt{x} = 0$;
 г) $(x^2 - x)^2 - 6(x^2 - x) = 0$;
 д) $|y|^2 + 3|y| = 0$;
 е) $2|z|^2 - 8 = 0$;
 ж) $\frac{x^2}{x+1} = \frac{2x+3}{x+1}$;
 з) $(3x^2 - 2)^2 = (2x^2 - 3)^2$.
- 2) а) $\sqrt{3}y^2 - \sqrt{12}y = 0$;
 б) $(x^2 - 8)(3x^2 + 2x - 5) = 0$;
 в) $(3x^2 - 9)\sqrt{x} = 0$;
 г) $(y^2 + y)^2 - 12(y^2 + y) = 0$;
 д) $|z|^2 - 5 = 0$;
 е) $3|x|^2 + 8|x| = 0$;
 ж) $\frac{y^2 - 5y + 1}{2} - \frac{y^2 - 3}{3} = \frac{3}{2}$;
 з) $\frac{x^2}{x-3} = \frac{2x+3}{x-3}$.

Проверь себя!

1. Данное число является корнем уравнения

$$3x^2 - 6x + 1\frac{2}{3} = 0.$$

А. -0,725.

Б. 12.

В. $\frac{1}{3}$.

2. Сколько корней имеет квадратное уравнение

$$-\frac{1}{3}x^2 + x - \frac{3}{4} = 0?$$

А. Ни одного.

Б. Один.

В. Два.

3. Решите уравнение $(2x - 3)(x + 1) = -16x - (x - 3)^2$.

А. $x = -2$; $x = -1$. Б. $x = -2$; $x = 1$. В. $x = -1$; $x = 2$.

4. Решите уравнение $x(x - 1) = (2x - 3)(x - 1)$.
 А. $x = 3$. Б. $x = 1$. В. $x = 3$; $x = 1$.
5. Решите уравнение $\frac{1}{5}x^2 = 4x$.
 А. $x = 0$; $x = \frac{4}{5}$. Б. $x = \frac{5}{4}$; $x = 0$. В. $x = 0$; $x = 20$.
6. Разность между бóльшим и меньшим корнями квадратного уравнения $9x^2 + 3x - 2 = 0$ равна:
 А. $\frac{1}{3}$. Б. 1. В. $\frac{2}{3}$.
7. Сколько различных корней имеет уравнение
 $(x^2 - 2x - 8)(x^2 + 4x + 4) = 0$?
 А. 2. Б. 3. В. 4.
8. Сумма корней уравнения $(x^2 + 3x)(x^2 - 5)\sqrt{x} = 0$ равна:
 А. -3. Б. 0. В. $\sqrt{5}$.

🔑 В Б А В В Б А В

О-21. Теорема Виета

Если x_1 и x_2 — корни уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$$\text{то } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

1. Найдите сумму и произведение корней квадратного уравнения двумя способами: решив уравнение и по теореме Виета. Сравните результаты:
- 1) а) $x^2 - 2x - 24 = 0$; г) $3x^2 + 7x - 10 = 0$;
 б) $x^2 + 3x = 0$; д) $x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{4} = 0$;
 в) $-x^2 + 5x - 6 = 0$; е) $9x^2 - 16 = 0$.
- 2) а) $x^2 - 2x - 15 = 0$; г) $5x^2 - 3x - 2 = 0$;
 б) $x^2 - 4x = 0$; д) $x^2 - \sqrt{3}x + \frac{1}{2} = 0$;
 в) $-x^2 + 2x + 8 = 0$; е) $16x^2 - 9 = 0$.

2. По теореме Виета найдите второй корень уравнения, зная первый:

1) а) $x^2 - 17x + 30 = 0$, $x_1 = 2$;

б) $2x^2 - 7x + 3 = 0$, $x_1 = 3$.

2) а) $x^2 - 19x + 34 = 0$, $x_1 = 2$;

б) $2x^2 - 11x + 15 = 0$, $x_1 = 3$.

3. Проверьте, что либо число 1, либо число -1 является корнем данного уравнения, и, пользуясь равенством

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, найдите второй корень:

1) а) $x^2 + 17x - 18 = 0$; в) $18x^2 - 29x + 16 = 0$;

б) $x^2 - 15x - 16 = 0$; г) $17x^2 - 19x - 36 = 0$.

2) а) $x^2 + 18x - 19 = 0$; в) $12x^2 - 35x + 28 = 0$;

б) $x^2 - 16x - 17 = 0$; г) $15x^2 - 28x - 43 = 0$.

4. По теореме Виета подберите корни уравнения:

1) а) $x^2 - 11x + 28 = 0$; в) $x^2 - 3x - 28 = 0$;

б) $x^2 + 11x + 28 = 0$; г) $x^2 + 3x - 28 = 0$.

2) а) $x^2 - 12x + 27 = 0$; в) $x^2 - 6x - 27 = 0$;

б) $x^2 + 12x + 27 = 0$; г) $x^2 + 6x - 27 = 0$.

3) а) $x^2 - 13x + 36 = 0$; в) $x^2 + 20x + 36 = 0$;

б) $x^2 - 15x + 36 = 0$; г) $x^2 + 37x + 36 = 0$.

4) а) $x^2 + 5x - 36 = 0$; в) $x^2 - 16x - 36 = 0$;

б) $x^2 + 9x - 36 = 0$; г) $x^2 - 35x - 36 = 0$.

5. Составьте квадратное уравнение по его корням, равным:

1) а) 1 и -5 ; г) 17 и -1 ; ж) 2.

б) 2 и 7; д) $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$;

в) -3 и -11 ; е) 0 и -3 ;

2) а) 1 и 7; г) -13 и 1; ж) -8 .

б) 2 и -5 ; д) $-\sqrt{5}$ и $\sqrt{5}$;

в) 11 и -4 ; е) 2 и 0;

6. Зная один из корней уравнения, найдите другой корень:

а) $61x^2 - 40x - 164 = 0$, $x_1 = 2$;

б) $19x^2 - 26\sqrt{3}x + 21 = 0$, $x_1 = \sqrt{3}$;

в) $x^3 - 4x + (1 - 2\sqrt{2}) = 0$, $x_1 = 1 - \sqrt{2}$.

7. Проверьте, что либо число 1, либо число -1 является корнем данного уравнения, и, пользуясь равенством $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, найдите второй корень уравнения:
- а) $167x^2 - 165x - 2 = 0$;
 б) $234x^2 + 217x - 17 = 0$;
 в) $\sqrt{3}x^2 - (\sqrt{3} - 2)x - 2 = 0$;
 г) $(\sqrt{5} - 2)x^2 + \sqrt{5}x + 2 = 0$.
8. Известно, что число -2 является корнем данного уравнения. Найдите значение m и второй корень уравнения:
- а) $x^2 - mx + 8 = 0$; в) $-mx^2 + 3x + 14 = 0$.
 б) $x^2 + 3x - m = 0$;
9. При каком значении n один из корней уравнения $x^2 - 9x + n = 0$ на 3 больше другого корня? Найдите оба корня.
10. Зная, что уравнение имеет два корня x_1 и x_2 , найдите $x_1^2 + x_2^2$; $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$:
- а) $x^2 - 4x + 3 = 0$; в) $2x^2 - 7x - 12 = 0$.
 б) $x^2 - 13x + 19 = 0$;
11. Подберите целый корень уравнения и найдите по теореме Виета другой корень:
- а) $3x^2 - 2x - 1 = 0$; в) $2x^2 - 7x + 6 = 0$;
 б) $3x^2 + 2x - 5 = 0$; г) $5x^2 + 7x - 6 = 0$.

О-22. Разложение квадратного трехчлена на множители

1. Проверьте, что число 1 является корнем трехчлена:
- а) $7x^2 - 6x + 1$; б) $-x^2 + 5x - 4$; в) $\frac{1}{2}x^2 - 7x + 6,5$.
2. Найдите корни квадратного трехчлена:
- 1) а) $x^2 - x - 2$; в) $-5x^2 - 3x + 36$;
 б) $3x^2 - 4x - 4$; г) $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 8$.
- 2) а) $x^2 + x - 2$; в) $5x^2 - 3x - 36$;
 б) $-3x^2 + 4x + 4$; г) $\frac{1}{2}x^2 + 3x - 8$.

Если у квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$:

1) два корня x_1 и x_2 , то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

2) один корень x_1 , то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2;$$

3) нет корней, то квадратный трехчлен на множители не раскладывается.

Обратите внимание на трудные случаи:

$$\begin{aligned} \text{а) } 6x^2 + 5x - 21 &= 6\left(x - \left(-\frac{7}{3}\right)\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) = \\ &= 3 \cdot 2\left(x + \frac{7}{3}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) = 3\left(x + \frac{7}{3}\right) \cdot 2\left(x - \frac{3}{2}\right) = \\ &= (3x + 7)(2x - 3). \end{aligned}$$

Числа $-\frac{7}{3}$ и $\frac{3}{2}$ появились как корни квадратного уравнения $6x^2 + 5x - 21 = 0$. У данного уравнения $a = 6$, $x_1 = -\frac{7}{3}$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{б) } -x^2 + 2x + 24 &= -1 \cdot x^2 + 2x + 24 = \\ &= -1 \cdot (x - 6)(x - (-4)) = (6 - x)(x + 4). \end{aligned}$$

Числа 6 и -4 появились как корни квадратного уравнения $-x^2 + 2x + 24 = 0$. У данного многочлена $a = -1$, $x_1 = 6$, $x_2 = -4$.

3. Разложите, если это возможно, квадратный трехчлен на множители:

1) а) $x^2 - 5x - 6$; г) $\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$;

б) $-x^2 + 10x - 21$; д) $2y^2 - y + 1$;

в) $-2y^2 + y + 1$; е) $8z^2 - 2z - 15$.

2) а) $x^3 + 2x - 48$; г) $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$;

б) $-x^2 + 3x + 70$; д) $2a^2 - a + 3$;

в) $2a^2 - 5a + 3$; е) $10y^2 + 13y - 3$.

4. Сократите дробь:

1) а) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 3x - 4}$; б) $\frac{p^2 - 4p}{p^2 - 5p + 4}$; в) $\frac{a^2 - 6a + 9}{2a^2 - a - 15}$; г) $\frac{y^2 - 2y + 1}{2 - y - y^2}$.

2) а) $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 3x - 4}$; б) $\frac{p^2 - 4}{p^2 - 2p - 8}$; в) $\frac{m^2 - 4m + 4}{2m^2 - 7m + 6}$; г) $\frac{c^2 - 6c + 9}{6 + c - c^2}$.

5. Упростите выражение и найдите ответ среди данных вариантов ответа:

- 1) а) $\frac{x^2 + x - 12}{x - 3} + \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 3}$;
 б) $\frac{2x + 6}{x^2 - x - 12} - \frac{3x + 9}{x^2 + 7x + 12}$;
 в) $\frac{x}{x^2 + x - 6} : \frac{x}{4 - x^2}$;
 г) $\frac{5y - 15}{x^2 - xy + x - y} \cdot \frac{x - y}{y^2 - 7y + 12} : \frac{5}{y - 4}$.

Варианты ответа: $\frac{20 - x}{x^2 - 16}$; $2x + 6$; $\frac{x + 2}{x + 3}$; $\frac{1}{x + 1}$;
 $\frac{-2}{x + 2}$.

- 2) а) $\frac{a^2 - 2a - 8}{a + 2} + \frac{a^2 - a - 20}{a - 5}$;
 б) $\frac{2a - 8}{a^2 - a - 12} - \frac{3a - 15}{a^2 - 8a + 15}$;
 в) $\frac{a}{a^2 - 7a + 12} : \frac{a}{9 - a^2}$;
 г) $\frac{7b - 14}{a^3 + ab - a - b} \cdot \frac{a + b}{b^2 - b - 2} : \frac{7}{b + 1}$.

Варианты ответа: $\frac{1}{a - 1}$; $\frac{a + 15}{9 - a^2}$; $2a$; $\frac{a + 3}{4 - a}$; $\frac{a + 3}{a - 4}$.

6. Сократите дробь:

- а) $\frac{11a - 3 - 6a^2}{3a^3 + b - 3ab - a}$; г) $\frac{a^3 - 27}{a^2 + 3a + 9}$;
 б) $\frac{25x^2 - 60x + 36}{25x^2 - 25x - 6}$; д) $\frac{3y^3 - 5y^2 + 2y}{11y - 6 - 3y^2}$;
 в) $\frac{(2x - 3)^2 - (3x - 5)^2}{5x^2 - 8x}$;

7. Найдите значение выражения и найдите ответ среди данных вариантов ответа:

- а) $\frac{2x^2 - 11x + 9}{x - 1} + \frac{5x^2 - x - 18}{x - 2}$ при $x = -3\frac{1}{7}$;
 б) $\frac{m + 12}{m^3 - 9m} : \left(\frac{m - 3}{2m^3 + 5m - 3} + \frac{9}{m^2 - 9} \right)$ при $m = 1,5$;
 в) $\left(\frac{2p}{p - 2} - \frac{3}{3 - p} + \frac{4}{p^2 - 5p + 6} \right) : \frac{2p + 1}{3}$ при $p = 3\frac{1}{6}$.

Варианты ответа: $\frac{8}{9}$; -22; 41; 18.

8. Сократите дробь:

а) $\frac{x^2 + ax - 6a^2}{x^2 - ax - 2a^2}$; б) $\frac{2x^2 + 5mx - 3m^2}{4x^2 + 4mx - 3m^2}$.

9. Докажите, что значение выражения

$$\left(\frac{p-4}{2p^2+11p+5} + \frac{2p+1}{20-p-p^2} \right) \cdot \frac{2p+1}{3} - \frac{3}{4-p}$$

не зависит от значения переменной.

Проверь себя!

1. Произведение двух корней уравнения $3x^2 - 5x - 6 = 0$ равно:

А. $\frac{5}{3}$. Б. -2. В. -6.

2. Сумма корней квадратного уравнения $6 + 5x - 3x^2 = 0$ равна:

А. $1\frac{2}{3}$. Б. $-1\frac{2}{3}$. В. -5.

3. Произведение корней уравнения $-3x^2 + 167x = 0$ равно:

А. $\frac{167}{3}$. Б. -167. В. 0.

4. Уравнение $(x^2 - 3x - 17)(x^2 + 3x - 19) = 0$ имеет четыре корня. Найдите их сумму.

А. 0. Б. -6. В. 6.

5. Разложите на множители квадратный трехчлен

$$24 - 5x - x^2.$$

А. $(8 + x)(3 + x)$. Б. $(x + 8)(3 - x)$. В. $(8 - x)(3 + x)$.

6. Сократите дробь $\frac{x^2 + 5x - 36}{81 - x^2}$.

А. $\frac{x-4}{x-9}$. Б. $\frac{x+4}{9-x}$. В. $\frac{x-4}{9-x}$.

7. Найдите значение дроби $\frac{2x^2 - x - 10}{10x - 25}$ при $x = -1,75$.

А. 0,05. Б. 0,5. В. -0,75.

8. Числа x_1 и x_2 — корни уравнения $3x^2 - 18x - 71 = 0$.

Значение выражения $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ равно:

А. -6. Б. $-\frac{18}{71}$. В. $-\frac{71}{3}$.

 Б А В А Б В А Б

Глава 4. Системы уравнений

О-23. Линейное уравнение

с двумя переменными

1. Проверьте, является ли пара чисел $(-1; 3)$ решением уравнения:
а) $x + 2y = 5$; в) $3x + y = -1$;
б) $2x - 3y = -3$; г) $x^2 + y = 4$.
 2. Даны пары значений переменных x и y : $(-1; 2)$, $(0; 3)$, $(0; 0)$, $(3; 0)$. Какие из них являются решением уравнения:
а) $x^3 + y^3 = 7$; б) $x^2 + y^2 = 9$; в) $\frac{x}{3} + \frac{2y}{5} = 0$?
 3. Какие из уравнений:
а) $x^2 + 3y = 5$; г) $\frac{2}{x} + 3y = 5$;
б) $2x - 7y = -2$; д) $\frac{2}{3}x + \frac{3}{8}y = -\frac{2}{7}$
в) $x^3 + 4y^2 = 11$; являются линейными?
 4. Выразите y через x и x через y из уравнений:
а) $x + 3y = 1$; в) $2x - 5y = 7$;
б) $y - 2x + 6 = 0$; г) $5x + 3y - 2 = 0$.
 5. Запишите несколько решений уравнения:
а) $x + y = 4$; в) $x - 11y = 1$;
б) $2x - 3y = 0$; г) $4y + 4x - 1 = 0$.
 6. Один работник получает x р. в месяц, а другой — y р. Дайте словесное истолкование следующих уравнений:
а) $y = 2x$; б) $x + y = 20000$; в) $y - x = 500$.
 7. Найдите какую-нибудь пару натуральных чисел, являющуюся решением уравнения:
а) $x + y = 3$; в) $x + 5y = 25$;
б) $2x + y = 5$; г) $2x + 4y = 16$.
 8. Назовите пару натуральных чисел $(x; y)$, являющуюся решением уравнения $x + 7y = 15$, такую, что $y = 1$, и такую, что $y = 2$. Можете ли вы назвать такую пару, если $y = 3$? если $y > 3$?
 9. Запишите все пары натуральных чисел, являющихся решениями уравнения:
а) $x + y = 2$; в) $6x + y - 24 = 0$;
б) $2x + 3y = 10$; г) $x + 0,5y = 4$.
- У к а з а н и е. Воспользуйтесь методом перебора.

10. В таблице x строк и y столбцов. Дайте словесное истолкование следующих уравнений:
- $y - x = 3$;
 - $x = y$;
 - $xy = 24$.
11. Дано уравнение $8x - 5y = 1$. Запишите какие-нибудь натуральные числа x и y , являющиеся решениями этого уравнения. Придумайте задачу про гири, весящие 5 и 8 г, которую можно решить с помощью этого уравнения.
12. Пятирублевыми и двухрублевыми монетами было заплачено 19 р. Составьте по этим данным уравнение и установите, как могла быть произведена плата. Найдите все возможные способы.
13. Куплено несколько наборов фломастеров. В одних из них 4 фломастера, а в других — 7. Всего куплено 22 фломастера. Сколько наборов каждого типа было куплено? (Ответ дайте, составив уравнение.)
14. Какие из уравнений:
- $x^4 + y^4 = -2$;
 - $2x - y = 3$;
 - $(x - 1)(y - 2) = 0$;
 - $\frac{1}{xy} = 9$;
 - $x^3 = y^3$;
 - $x^2 + (x - 1)^4 + y^2 = 0$
- не имеют решений? Приведите примеры решений остальных уравнений.

О-24. График линейного уравнения с двумя переменными

Графиком уравнения

$$ax + by = c,$$

где коэффициенты a и b не равны нулю одновременно, является прямая.

Всякая прямая на координатной плоскости является графиком уравнения вида

$$ax + by = c,$$

где коэффициенты a и b не равны нулю одновременно.

1. Выпишите уравнения, графиками которых являются прямые:

а) $x^2 + y = 6$;

б) $2x - 11y - \frac{4}{9} = 0$;

в) $x^3 - 2y^3 = 1$;

г) $3x - \frac{y}{4} = 6$;

д) $\frac{2}{x} + y = 4$;

е) $2y - 3x + 6 = 0$.

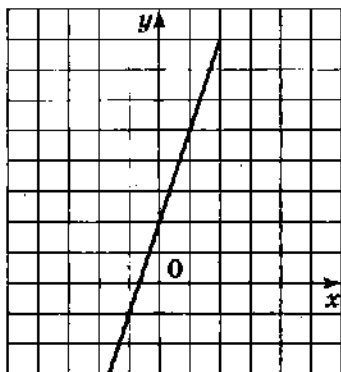


Рис. 3

2. На рисунке 3 изображен график прямой $y - 3x = 2$. Найдите с помощью графика несколько целых решений этого уравнения. Проверьте подстановкой, правильно ли указаны решения.

3. Постройте прямую, являющуюся графиком уравнения:

а) $x + y = 3$;

д) $2x + 4y = 0$;

б) $x - 2y = 4$;

е) $0,5x + 2y = 1$;

в) $y - 3x + 1 = 0$;

ж) $x + 0,5y = 2$;

г) $2y - 3x - 1 = 0$;

з) $0,25x - 0,5y = 1$.

4. Постройте прямую:

а) $y - 3 = 0$;

в) $2x + y = 1$;

б) $x - 2 = 0$;

г) $y - x = 3$.

Какая из них не пересекает ось абсцисс? ось ординат?

5. Постройте прямую:

а) $x + y = 2$;

в) $x - 3y = 1$;

б) $3x + 2y = 12$;

г) $y - 0,5x - 2 = 0$.

Для каждой из прямых установите, проходит ли она через точку $(2; 3)$ и через точку $(0; 2)$.

6. Найдите ординату точки прямой $x + 2y - 1 = 0$, имеющей абсциссу, равную 2; -1; 0.

7. Найдите абсциссу точки прямой $4x - 3y = 5$, ордината которой равна 1; -2; 0.

8. Найдите координаты точек пересечения прямой:

а) $x + y = -1$; б) $-2x + 3y = 5$; в) $-x - 4y + 3 = 0$
с осями координат.

9. Постройте в одной системе координат прямые:

а) $y - x = 2$ и $y + 2x = 3$;

б) $y - 2 = 0$ и $y = -3$;

в) $y - 3x - 1 = 0$ и $y = 3x - 1$;

г) $x - 2y = 0$ и $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Имеют ли они общие точки?

10. Постройте прямые в одной системе координат и укажите координаты точки их пересечения. Проверьте результат подстановкой найденной пары чисел в уравнения:

а) $y - x = 3$ и $2x - y = -4$;

б) $3x - 2y = -1$ и $2x + y = 4$.

11. Прямые $x = 2$, $y = 3$ и $2x + y - 3 = 0$, попарно пересекаясь, образуют треугольник. Вычислите его площадь.

12. Выпишите уравнения, которые задают ту же самую прямую, что и уравнение $3x + y = 1$:

а) $6x + 2y = 2$; г) $x + 3y = 1$;

б) $x + \frac{y}{3} = \frac{1}{3}$; д) $-y = -1 + 3x$;

в) $3x - y = -1$; е) $x + y = 3$.

13. Известно, что прямая $ax + 2y = 6$ проходит через точку с координатами $(2; 1)$. Определите коэффициент a .

14. Известно, что прямая $x + 4ay = 3$ пересекает ось ординат в точке с ординатой $y = 3$. Определите коэффициент a .

15. Известно, что прямая $2ax + 3y = a + 3$ пересекает ось абсцисс в точке с абсциссой $x = 2$. Определите коэффициент a .

16. Постройте график уравнения:

а) $(y - 1)(y - 2) = 0$; в) $(y - 1)(x + 2) = 0$;

б) $(x - 1)(x + 2) = 0$; г) $(2y - x)(2x + y - 1) = 0$.

17. Известно, что графики уравнений $(y - a)(2y - 4) = 0$ и $y = 2$ совпадают. Найдите число a .

18. Известно, что графики уравнений $x(x - a) = 0$ и $x = a$ совпадают. Найдите число a .

19. Укажите точки пересечения графика уравнения $x^4 + y^4 = 1$ с осями координат.

20. Пересекает ли график уравнения $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ ось абсцисс? ось ординат?

21. Укажите три точки графика уравнения $x^3 + y^3 = x + y$, не лежащие на одной прямой. Является ли графиком этого уравнения прямая или окружность?

О-25. Уравнение прямой вида $y = kx + l$

Число k в уравнении прямой

$$y = kx + l$$

называется угловым коэффициентом.

Прямая $y = kx + l$ пересекает ось ординат в точке с ординатой $y = l$.

Две прямые $y = kx + l$ и $y = k_1x + l_1$ параллельны тогда и только тогда, когда $k = k_1$.

1. Запишите уравнения прямой в виде $y = kx + l$ и назовите коэффициенты k и l :

а) $x - y = 1$; г) $7 - 3y = 4x$;
б) $2x + 6y = -1$; д) $y - 7 = 0$;
в) $y + 3x - 7 = 0$; е) $4 - y + 2x = 0$.

2. Постройте прямую, заданную уравнением:

а) $y = -3x$; в) $y = \frac{1}{4}x$; д) $y = 4x$;
б) $y = 0,2x$; г) $y = -\frac{1}{3}x$; е) $y = -0,3x$.

3. Запишите уравнение прямой в виде $y = kx + l$ при заданных значениях k и l :

а) $k = 1$, $l = 1$; в) $k = -1$, $l = 2$;
б) $k = 0$, $l = 3$; г) $k = 2$, $l = -3$.

Постройте эту прямую.

4. Даны уравнения:

а) $y = 2x + 4$; в) $y = x^2$; д) $y = -2x$;
б) $y = x^3$; г) $y = 3$; е) $y = x^2 - 1$.

Графики каких из них проходят через начало координат? Какие из этих графиков являются прямыми?

5. Укажите ординату точки, в которой график уравнения пересекает ось ординат:

а) $y = 2x + 3$; в) $x - y = -1$;
б) $y = \frac{1}{4}x - 5$; г) $2x - y = 4$.

6. Постройте прямую, проходящую через точки:

а) $A(0; 0)$ и $B(1; 1)$; в) $A(1; 1)$ и $B(-2; 2)$;
б) $A(0; 2)$ и $B(2; 1)$; г) $A(1; 3)$ и $B(-1; 1)$.

Определите знак углового коэффициента построенной прямой.

7. Укажите, у какой из прямых наибольший угловой коэффициент:
- $y = 2x + 1$, $y = 3x - 2$, $y = 0,9x + 17$;
 - $y = -3x + 1$, $y = -2x + 4$, $y = -3,5x - 2$;
 - $y = -0,2x + 1$, $y = 3,1x - 2$, $y = 3\frac{1}{2}x + 3$.
8. По прямолинейному шоссе едут три машины. Зависимости, связывающие расстояния от них до пункта А (в километрах) и время, прошедшее после начала наблюдения (в часах), выражаются уравнениями $y = 50x$, $y = 20x$, $y = 30x$. Постройте графики этих уравнений. Какое из рассматриваемых расстояний возрастает быстрее всего? Как об этом судить по графику?
9. Прямые заданы уравнениями $y = 3x - 1$ и $y = 3x + 2$. Назовите угловой коэффициент каждой прямой. Каково взаимное расположение этих прямых?
10. Не строя данные прямые, объясните, пересекаются ли они:
- $y = 2x - 3$ и $y = 3x - 2$;
 - $y = 5x - 2$ и $y = 5x - 4$;
 - $y = 4x - 3$ и $y = -4x + 3$;
 - $y = -2x - 3$ и $y = -2x - 2$.
11. Для каждой прямой назовите угловой коэффициент и ординату точки, в которой прямая пересекает ось y , и постройте эту прямую:
- $y = -5x$;
 - $y = 6x + 0,5$;
 - $y = 0,5x - 2$;
 - $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.
12. Запишите уравнение прямой, если известен ее угловой коэффициент k и точка А, в которой прямая пересекает ось y , и постройте эту прямую:
- $k = 2$, $A(0; 1)$;
 - $k = 0$, $A(0; -0,5)$;
 - $k = -4$, $A(0; -3)$;
 - $k = -\frac{1}{2}$, $A(0; 0)$.
13. Дана прямая $y = -4x + 3$. Запишите уравнение какой-нибудь прямой:
- имеющей такую же точку пересечения с осью y ;
 - имеющей такой же угловой коэффициент.
-
14. Запишите уравнение прямой, параллельной прямой $y = 2x - 1$ и пересекающей ось ординат в точке:
- $A(0; 2)$;
 - $A(0; -3)$;
 - $A(0; -5)$.

15. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку $(0; 3)$ и параллельной прямой:
а) $y = 3x - 4$; б) $y = -2x + 5$; в) $3x + 2y = 8$.
16. Прямая $y = ax - 5$ параллельна прямой:
а) $y = -2x + 3$; б) $y = 3$; в) $5x - y = 4$.
Определите число a .
17. Прямая $y = 2ax + a - 1$ параллельна прямой $y = 4x$.
Найдите ординату точки ее пересечения с осью ординат.
18. На рисунке 4 изображен график прямой $y = ax + b$. Определите знаки чисел a и b .
19. Человек идет по прямолинейному шоссе, на котором стоит его дом. Зависимость, связывающая расстояние y (км) до его дома и время x (ч) от начала отсчета, выражена уравнением: а) $y = 4x$; б) $y = 12 - 3x$. Постройте график уравнения. Определите, к дому или от дома идет человек.
20. Зависимость, связывающая объем жидкости y (л) в сосуде и время t (с) от начала наблюдения, выражена уравнением: а) $y = 2t + 10$; б) $y = 10 - t$. Постройте график уравнения. Определите, возрастал или убывал объем жидкости в сосуде.
21. Пункты A и B , находящиеся на расстоянии 80 км друг от друга, связаны прямолинейным шоссе. Одновременно из пункта A в пункт B выезжает автомобиль со скоростью 40 км/ч, а из пункта B в пункт A выезжает велосипедист со скоростью 10 км/ч. Запишите уравнения, связывающие время, прошедшее от начала движения, и расстояния от автомобиля и от велосипедиста до пункта A . Постройте графики этих уравнений. Определите с их помощью, через какое время после начала движения автомобиль и велосипедист встретятся.
22. Прямолинейное шоссе проходит через пункты A и B , находящиеся на расстоянии 20 км. Из пункта A в направлении пункта B выехал автомобиль, скорость которого 60 км/ч; одновременно из пункта B выехал автобус, удаляющийся от пункта A со скоростью 40 км/ч. Запишите уравнения, связывающие время,

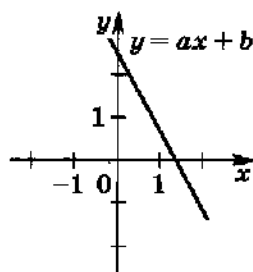


Рис. 4

прошедшее от начала движения, и расстояния от автомобиля и от автобуса до пункта А. Постройте графики этих уравнений. Определите с их помощью, на каком расстоянии от пункта А автомобиль догонит автобус.

О-26. Системы уравнений. Решение систем уравнений способом сложения

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 5y = 8 \\ 2x + 3y = 5. \end{cases}$$

Решение.

а) Добьемся того, чтобы коэффициенты при x в обоих уравнениях были равны: $\begin{cases} 6x + 10y = 16 \\ 6x + 9y = 15. \end{cases}$

б) Вычтем из первого уравнения второе. Получим $y = 1$.

в) Подставим найденное значение y в первое уравнение и найдем соответствующее значение x :

$$6x + 10 = 16; \quad x = 1.$$

О т в е т. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$

1. Является ли пара чисел $(1; -2)$ решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 2x - y = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2y = -4 \\ x + y = -1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 3x - y = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x = 3 \\ 5x - y = -7? \end{cases}$

2. Какой из рисунков 5—7 является графической иллюстрацией системы уравнений $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = 5x - 1? \end{cases}$

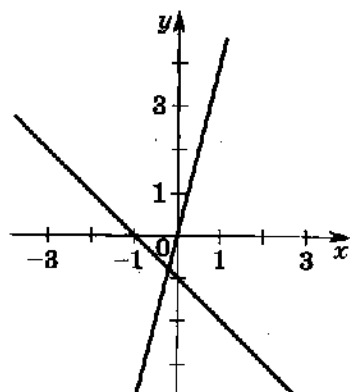


Рис. 5

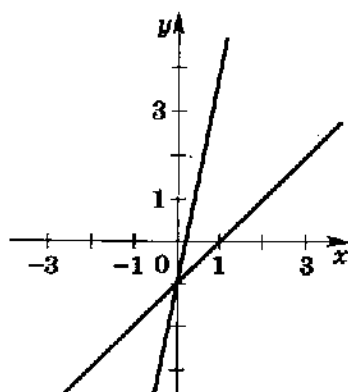


Рис. 6

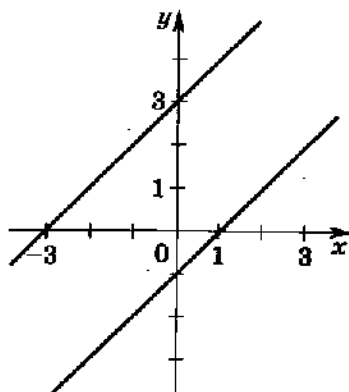


Рис. 7

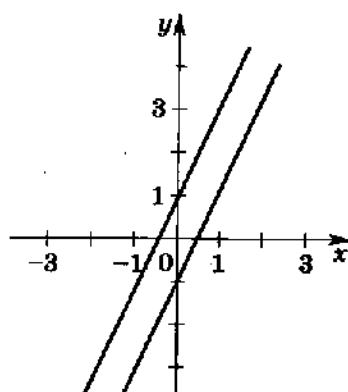


Рис. 8

3. На рисунке 8 изображены две прямые. Какая из следующих систем уравнений ему соответствует:

а) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 4x + 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$?

4. С помощью графиков выясните, сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 3 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2y - 6x = -8 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$; д) $\begin{cases} 2x = 4 \\ -3y = 3 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ y = 3 \end{cases}$; е) $\begin{cases} x = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$.

5. Решите систему уравнений двумя способами, исключив сначала одну переменную, а затем другую:

$$\text{а) } \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 2y = 4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x - y = 5 \\ -x + 3y = 1. \end{cases}$$

Решите систему уравнений (6—8):

$$\begin{array}{ll} \text{6. а) } \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x + y = 3; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} 6u - 5v = 6 \\ 5v - 6u = -6; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} 3a - 4b = 2 \\ 5a + 4b = 14; \end{cases} & \text{д) } \begin{cases} 4p - 2q = 0 \\ 5p + 2q = 9; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} 4z - 5y = 1 \\ 5y - 4z = 3; \end{cases} & \text{е) } \begin{cases} 4n + 13m = 30 \\ -13m - 3n = -29. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{7. а) } \begin{cases} 3n - m = 5 \\ 3n - 7m = -55; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} 6u - 7v = 19 \\ 6u + 3v = 9; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} 4z + 3y = 7 \\ 5y + 4z = 9; \end{cases} & \text{д) } \begin{cases} 3p - 2q = 7 \\ 3p - 2q = 7; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x + y = 3; \end{cases} & \text{е) } \begin{cases} 5a - 4b = 2 \\ 3a - 4b = -2. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{8. а) } \begin{cases} 3a + 4b = 7 \\ 5a + 3b = 8; \end{cases} & \text{е) } \begin{cases} 5a - 7b = 2 \\ 10a - 14b = 4; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ 5x + y = -3; \end{cases} & \text{ж) } \begin{cases} 3p - 2q = -1 \\ -5p + 3q = -2; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} 5n + 4m = 22 \\ 3n - 2m = 0; \end{cases} & \text{з) } \begin{cases} 2x + 5y = -6 \\ 5x + 2y = 6; \end{cases} \\ \text{г) } \begin{cases} 5z - 2y = 1 \\ 4y - 10z = 3; \end{cases} & \text{и) } \begin{cases} 3z - 5y = 4 \\ 3y - 4z = -9; \end{cases} \\ \text{д) } \begin{cases} 3u - v = -7 \\ 2v - 5u = 12; \end{cases} & \text{к) } \begin{cases} 15m - 12n = 11 \\ 4n - 5m = 3. \end{cases} \end{array}$$

9. Вычислите координаты точки пересечения прямых:

$$\begin{array}{l} \text{а) } y = 3x - 1 \text{ и } y = 5x + 3; \\ \text{б) } 2x + 3y = 5 \text{ и } 3x - 2y = 1; \\ \text{в) } -x + 3y = 1 \text{ и } 2x + 5y = 9; \\ \text{г) } 3x + 4y = 23 \text{ и } 2y - 5x = 5. \end{array}$$

10. Найдите два числа, сумма которых равна восьми, а разность равна двум.
11. Найдите два числа, сумма которых равна десяти, а разность одного из них и удвоенного второго равна семи.
12. Найдите два числа, одно из которых втрое больше другого, а их разность равна 12.

13. Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - 4y = -2; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} \frac{p}{2} - \frac{3q}{5} = 1\frac{3}{10} \\ \frac{p}{6} + \frac{3q}{2} = 4; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} 4t + 5p = 2 \\ 3t - 2p = 5; \end{cases} & \text{д) } \begin{cases} \frac{y}{3} + \frac{5z}{2} = 2 \\ \frac{y}{5} - \frac{z}{4} = \frac{1}{30}; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} \frac{2u}{3} - \frac{5v}{4} = -3 \\ \frac{u}{4} - \frac{2v}{3} = -1\frac{11}{12}; \end{cases} & \text{е) } \begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{2} = -\frac{19}{50} \\ \frac{7x}{3} + \frac{2y}{5} = 1. \end{cases} \end{array}$$

14. Известно, что система уравнений $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = ax + 2 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений. Найдите число a .
15. Известно, что система уравнений $\begin{cases} y = 5x - 3 \\ y = ax + 5 \end{cases}$ не имеет решений. Найдите число a .
16. Приведите примеры таких значений a , что система уравнений $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = ax + 1 \end{cases}$ имеет единственное решение.
17. Известно, что система уравнений $\begin{cases} y - 5x = 4 \\ y = ax + 4 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений. Найдите число a .
18. Известно, что система уравнений $\begin{cases} 2y - 12x = 3 \\ y - ax + 5 = 0 \end{cases}$ не имеет решений. Найдите число a .
19. Приведите примеры таких значений a , что система уравнений $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ ax - y = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

20*. Постройте на координатной плоскости график уравнения $|x| + |y| = 1$ и прямые $y = 0$ и $y = 1$.

а) Сколько решений имеет каждая из систем

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} |x| + |y| = 1? \\ y = 1 \end{cases}$$

б) Составьте еще какую-нибудь систему уравнений вида

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ y = a \end{cases}$$

так, чтобы она имела единственное решение; имела два решения; не имела решений.

Можете ли вы составить систему уравнений такого вида так, чтобы она имела ровно три решения? бесконечно много решений?

21*. Укажите такое число a , чтобы система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ y = ax + 1 \end{cases}$$

имела бесконечно много решений.

О-27. Решение систем уравнений **способом подстановки**

Для решения системы двух уравнений с двумя переменными способом подстановки следует:

- 1) выразить из какого-то уравнения одну переменную через другую;
- 2) подставить это выражение в оставшееся уравнение;
- 3) решить полученное уравнение с одной переменной;
- 4) найти соответствующие значения второй переменной, подставив найденные значения первой переменной в составленное вначале выражение.

1. Выразите из уравнения сначала одну переменную, а потом другую:

а) $x - 3y = 2$;

г) $7a + 7b = 1$;

б) $2u + 5v = -1$;

д) $-3x - 2y = 6$;

в) $3p + 4q = 5$;

е) $4y + 5z = -2$.

2. Решите систему уравнений способом подстановки:

а) $\begin{cases} y = x + 2 \\ 2x + 3y = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2y - z = 3 \\ 3y + 2z = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} a = 2b \\ 3a - 5b = 4; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2m + 4n = 8 \\ 5m - 3n = 7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} u + 2v = 3 \\ 3u + 2v = 5; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3k - 6t = -9 \\ 2k + 7t = 16. \end{cases}$

3. Решите систему уравнений, применяя любой из известных вам способов:

а) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 3x + 5y = 8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2y - 3z = 9 \\ 4y + 5z = 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} a - 5b = 11 \\ 3a - 5b = 13; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2m - n = 5 \\ 4m - 5n = 13; \end{cases}$

в) $\begin{cases} u - 2v = 5 \\ 5u + 2v = 1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} k - 5t = 0 \\ 2k + 3t = 26. \end{cases}$

4. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = x \\ x^2 + 3y = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y^2 - z = 3 \\ y^2 + 3z = 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} a - 2b = 1 \\ ab = 10; \end{cases}$ д) $\begin{cases} m^2 + 5n = -14 \\ m - 2n = 7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} u + 2v = 7 \\ u^2 + 4v = 13; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2k - 3t^2 = 7 \\ 3k + 5t = 20. \end{cases}$

5. Определите, пересекаются ли графики данных уравнений:

а) $y = 2x + 3$ и $y = x^2$;

б) $y = x^2 - 1$ и $y = x + 1$;

в) $y = x^2$ и $y = 3x - 7$;

г) $3x + 5y = 1$ и $5x + 6y = 4$;

д) $y^2 + x^2 = 1$ и $y = x + 5$;

е) $y^2 + (x - 1)^2 = 1$ и $y = -x$.

Если да, то найдите координаты точек пересечения.

6. Решите систему уравнений способом подстановки:

$$\text{а) } \begin{cases} x = 2y \\ z = 5y \\ 2x + 3y - 7z = 14; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = z + 1 \\ y = 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 21; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} u - 3v = 2 \\ 2v + w = 5 \\ u - 4v + w = 1; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} u = 2v + 1 \\ w - 3v + 1 = 0 \\ u^2 - v - 2w = 3; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} a - 5b = 0 \\ a + 3c = 1 \\ 3a + 4b + 6c = 20; \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} m^2 - 3n = -2 \\ 3k - 2m^2 = 1 \\ m + k + n = 3. \end{cases}$$

7. Решите систему уравнений, применяя замену переменных $x + y = u$, $xy = v$:

$$\text{а) } \begin{cases} (x + y)xy = 6 \\ x + y + xy = 5; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x + y + 2xy = -2 \\ 5(x + y) - 4xy = 4; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} (x + y)xy = 12 \\ x + y - xy = 1; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} (x + y)^2 + xy = 19 \\ x + y - xy = 1; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 3x + 3y - xy = 5 \\ x + y + 2xy = 4; \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} 2x + 2y - x^2y^2 = -6 \\ x + y + xy = -3. \end{cases}$$

8. Решите систему уравнений, применяя замену переменных $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 8 \\ \frac{1}{xy} = 2; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \frac{5x - 2y}{xy} = 1 \\ \frac{3}{x} - \frac{1}{y^2} = 5; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{x + y}{xy} = 5 \\ \frac{x - y}{xy} = 1; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \frac{2y^2 + x^2}{x^2y^2} = 9 \\ \frac{3}{x} - \frac{5}{y} = 1. \end{cases}$$

9. Решите систему уравнений любым известным вам способом:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 + 4xy + 4y^2 = 64 \\ x - 3y = -7; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 5u^2 - 3v^2 = 7 \\ 2u^2 + 3v^2 = 7; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 9x^2 - 6xy + y^2 = 25 \\ x + 2y = -3; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 3p^2 + 2q^2 = 18 \\ 3p^2 - q^2 = 9. \end{cases}$$

10*. С помощью графиков установите, сколько решений имеет система уравнений при всех возможных значениях a ;

$$\text{а) } \begin{cases} y = x^2 \\ y = a; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = a; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = a; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = a. \end{cases}$$

Пример. Найдите все такие значения параметра a , что система уравнений

$$\begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ y^2 + x = 2a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Выразим из первого уравнения системы x через y и подставим во второе уравнение:

$$y^2 + (1 - 3y) = 2a,$$

или после преобразований:

$$y^2 - 3y + 1 - 2a = 0.$$

Ясно, что данная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда полученное уравнение имеет единственное решение. Но это уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда, когда равен нулю дискриминант $3^2 - 4(1 - 2a)$. Решая полученное уравнение $9 - 4(1 - 2a) = 0$, находим, что $a = -\frac{5}{8}$.

Ответ. $a = -\frac{5}{8}$.

В заданиях 11—15 найдите все такие значения параметра a , что данная система уравнений имеет единственное решение:

$$11^*, \text{ а) } \begin{cases} y = 2ax + 1 \\ y = 4x - 2; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x + ay = 4 \\ 2x + 3y = -2; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = ax - 5; \end{cases} \quad \text{д) } \begin{cases} x + 4ay = 3 \\ ax + y = 5; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} ax + y = 8 \\ 6x + 2y = 11; \end{cases} \quad \text{е) } \begin{cases} 3ax + y = 1 \\ x + 3ay = 2. \end{cases}$$

$$12^*. \text{ а) } \begin{cases} x + 4 = 5 \\ y^2 + 2x - 4y + 3a - 2 = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} y - 3 = 2 \\ x^2 - 4y + 6x - 2a = -1; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} y - 1 = 2 \\ x^2 + y + 2(a - 1)x - 2 = 0; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 5 - x = 8 \\ y^2 - 2x - 2(a - 3)y + a + 3 = 0. \end{cases}$$

$$13^*. \text{ а) } \begin{cases} y = -x + 2 \\ x^2 + 3x + y - a + 7 = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3y + x = 5 \\ y^2 + 2x + 4y + a - 2 = 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x + y = -2 \\ x^2 + 4x + 3y - 3a + 5 = 0; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x + 8y = 16 \\ y^2 - 2ay + x + 2a = 0; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} y = -4x + 4 \\ x^2 + 2ax + y = 0; \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} y = -6x + 5 \\ x^2 + 2ax + y = a. \end{cases}$$

$$14^*. \text{ а) } \begin{cases} y = x + a \\ \frac{x^2 - 3x + y}{x} = 0; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 6x + y = 3a + 25 \\ \frac{x^2 + 2ax - 4x + y}{x - 2} = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} y = 4x - a \\ \frac{x^2 + y}{x - 1} = 0; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x = 4y + 4 \\ \frac{y^2 + 4ay + x}{y + 1} = 0. \end{cases}$$

15*. Найдите все такие значения параметра a , что данная система уравнений имеет ровно два решения:

$$\text{а) } \begin{cases} (x - 1)(y - a) = 0 \\ x^2 - 4ax + y = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} (x - a)y = 0 \\ y^2 + 6ay + x = 0. \end{cases}$$

О-28. Решение задач с помощью систем уравнений

1. Куплено несколько коробок конфет двух видов: в коробках первого вида по 15 конфет, в коробках второго вида по 20 конфет. Коробок первого вида куплено на 6 больше, чем коробок второго. Всего в коробках 230 конфет. Сколько коробок каждого вида куплено? Предложены следующие ответы:
а) 10 коробок первого вида и 4 коробки второго вида;
б) 7 коробок первого вида и 1 коробка второго вида;
в) 15 коробок первого вида и 10 коробок второго вида.
Проверьте, какие из этих ответов верные, а какие нет.
2. Запишите систему уравнений по следующим данным:
а) Число x вдвое больше числа y ; число y на 7 меньше числа x .
б) Число x на 5 больше числа y , а их сумма равна 12.
в) Число x на 3 больше, чем удвоенное число y , а произведение этих чисел равно 5.
3. Обозначьте искомые величины через x и y и составьте системы уравнений по следующим данным:
а) Иван Петрович зарабатывает на 5000 р. в месяц больше Петра Ивановича, а вместе они зарабатывают за месяц 30 000 р. Сколько зарабатывает за месяц каждый из них?
б) Люда сосчитала, что в течение четверти по алгебре в общей сложности она набрала 35 баллов, причем пятерок она получила на две меньше, чем четверок, а других оценок она не получала. Сколько пятерок и четверок получила Люда в течение четверти?
в) На пятитонной и трехтонной машинах вывезли 71 т песка. Машины всегда загружали полностью, и пятитонная машина сделала на 3 рейса больше, чем трехтонная. Сколько рейсов совершила каждая из машин?
г) Длина прямоугольника на 5 больше его ширины, а периметр прямоугольника равен 22. Найдите длину и ширину прямоугольника.
д) Длина прямоугольника на 3 больше его ширины, а площадь прямоугольника равна 10. Найдите длину и ширину прямоугольника.

4. Обозначьте искомые величины через x , y и z и составьте системы уравнений по следующим данным:
- Три мастерские за месяц отремонтировали 350 часов, причем первая мастерская отремонтировала вдвое больше, чем вторая, и на 100 штук больше, чем третья. Сколько часов отремонтировала каждая из мастерских?
 - На трех книжных полках стоит 1050 книг, причем на первой полке стоит на 100 книг больше, чем на второй, и на 200 книг больше, чем на третьей. Сколько книг на каждой из полок?
 - Прибыль «Бетта-банка» за квартал составила 45% от прибыли «Гамма-банка», а прибыль «Дельта-банка» за тот же квартал составила 75% от прибыли «Гамма-банка». Определите прибыль каждого из банков, если их общая прибыль равна 440 млн р.
5. Двоечник Женя решал задачу, в которой требовалось определить число мальчиков в классе (x) и число девочек в том же классе (y). Для решения Женя составлял различные системы:
- $\begin{cases} x + y = 35 \\ x = 2y; \end{cases}$
 - $\begin{cases} x - y = 25 \\ x = -2y - 5; \end{cases}$
 - $\begin{cases} x + 2y = 350 \\ x - y = 50. \end{cases}$
- И каждый раз его мама, даже не вчитываясь в условия задачи, говорила, что система составлена неверно. Почему?
6. Определите, возможны ли следующие ситуации:
- В 8А классе 20 человек получили за четверть по алгебре «5» или «4», в 8Б классе получивших пятерки вдвое больше, а получивших четверки вдвое меньше. Всего же в двух классах закончили четверть на «4» и «5» по алгебре 46 человек.
 - За 20 ластиков и 14 карандашей надо заплатить 480 р., а за 30 ластиков и 21 карандаш — 700 р.
- Решите задачу (7—22):
7. Группа туристов (220 человек) полностью заполнила несколько 50-местных и 35-местных автобусов. Известно, что всего было подано 5 автобусов. Сколько 50-местных и сколько 35-местных автобусов было занято туристами?
8. За горячую воду в квартире жилец уплатил на 110 р. меньше, чем за холодную, вся плата за воду состав-

дает 390 р. Сколько пришлось уплатить за горячую и сколько — за холодную воду?

9. Хозяйка купила говядины по 245 р. за килограмм и свинины по 330 р. за килограмм. Говядины было куплено на 1 кг больше, чем свинины, а денег на нее потрачено на 150 р. больше, чем на свинину. Сколько говядины и свинины было куплено?
10. У человека два счета, всего на них лежит 150 тыс. р. Если с первого счета снять 25%, а со второго — 50%, то всего будет снято 50 тыс. р. Сколько денег лежит на каждом счете?
11. В середине XVIII в. в Калуге, Ярославле и Туле в общей сложности было 165 каменных домов. При этом в Туле их было на 55 меньше, чем в Калуге, а в Ярославле — 50% от числа домов в Калуге. Сколько каменных домов было в каждом из названных городов?
12. Для начинки пирога поваренная книга рекомендует использовать орехи, сахар и сухари, причем вес орехов должен составлять 75% от веса сахара и 300% от веса сухарей. Хозяйка хочет, чтобы начинки было 400 г. Сколько граммов сахара, сухарей и орехов ей следует взять?
13. В бассейн проложены три трубы. Если накачивать воду в бассейн только через первую и вторую трубы, то за час в бассейн будет налито 1000 л воды, если накачивать только через вторую и третью, то за то же время будет налито 900 л воды, а если накачивать только через первую и третью, то будет налито 1100 л воды. Сколько литров воды за час можно накачать в бассейн через каждую из труб?
-
14. Экспорт продукции А в 2005 г. составлял 50% всего экспорта некой страны, а в 2008 г. — 40%. Причем общий объем экспорта продукции А за эти годы составил 47,4 млрд единиц национальной валюты. Экспорт же продукции В за эти годы составлял соответственно 6% и 9%, а всего 8,46 млрд единиц национальной валюты. Определите объем экспорта в 2005 и 2008 гг.
15. Известно, что в 1995 г. число российских граждан, посетивших США, составило 2% от общего числа выезжавших за рубеж. Число граждан США, посетивших тогда же Россию, составило 4% от общего числа иностран-

цев, въехавших в пределы России. Всего в 1995 г. в США поехали и из США приехали 380 тыс. человек. Для Финляндии соответствующие данные равны 8%, 24% и 1994 тыс. Определите, сколько иностранцев въехало в 1995 г. в Россию и сколько российских граждан выезжало за пределы России.

16. Смешав 30%-ный и 50%-ный растворы кислоты, получили 400 г 45%-ного раствора. Сколько было взято 30%-ного и 50%-ного растворов?
17. Имеются два сплава, состоящие из меди и олова: в первом медь составляет 40%, а во втором — 60%. При их сплавлении получили 500 г нового сплава, содержащего 48% меди. Чему была равна масса каждого из данных сплавов?
18. Двухрублевыми и пятирублевыми монетами и десятирублевыми банкнотами было выплачено 64 р. Причем известно, что десятирублевых банкнот было использовано на 3 больше, чем двухрублевых монет. Сколько было взято двухрублевых и пятирублевых монет и десятирублевых банкнот?
19. Было куплено несколько пачек бумаги разных видов: по 100, 300 и по 700 листов в пачке. Всего было куплено 3300 листов бумаги. Известно, что пачек по 100 листов было куплено на 4 больше, чем пачек по 300 листов. Сколько пачек каждого вида было куплено?
- 20*. Женя и Жора выпили по 6 стаканов сока и потратили денег поровну, причем Женя выпил апельсинового сока столько, сколько Жора клубничного; клубничного — сколько Жора яблочного, а яблочного — сколько Жора апельсинового. Сколько стаканов яблочного сока выпил Женя, если известно, что стакан яблочного сока стоит 10 р., клубничного — 20 р., а апельсинового — 30 р.?
21. Два чемодана и сумка весят 49 кг. Один чемодан весит на 2 кг больше другого, а тот, в свою очередь, весит на 16 кг больше сумки. Сколько весит каждый чемодан и сумка?
- 22*. Два чемодана и сумка весят 49 кг. Один чемодан весит на 2 кг больше другого, а тот, в свою очередь, весит на a кг больше сумки. Укажите два каких-нибудь целых числа a , таких, чтобы вес каждого из чемоданов и сумки выражался целым числом.

О-29. Задачи на координатной плоскости

Пример 1. Записать уравнение прямой, параллельной прямой $y = 5x + 3$ и проходящей через точку $(2; 2)$.

Решение. Ищем уравнение вида $y = 5x + l$. Так как точка $(2; 2)$ лежит на соответствующей прямой, то $2 = 5 \cdot 2 + l$. Отсюда $l = -8$.

Ответ. $y = 5x - 8$.

Пример 2. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $A(-2; 3)$ и $B(3; 8)$.

Решение. Ищем уравнение вида $y = kx + l$. Так как координаты точек A и B ему удовлетворяют, то имеем

$$\begin{cases} 3 = -2k + l \\ 8 = 3k + l \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} 5 = 5k \\ 8 = 3k + l; \end{cases} \quad \begin{cases} k = 1 \\ l = 5. \end{cases}$

Ответ. $y = x + 5$.

1. Запишите уравнение прямой и постройте ее, если известно, что:
 - а) угловой коэффициент прямой равен -2 и она проходит через точку $(0; 3)$;
 - б) угловой коэффициент прямой равен 3 и она проходит через точку $(1; 2)$;
 - в) угловой коэффициент прямой равен -3 и она проходит через точку $(2; 5)$.
2. Запишите уравнение прямой, параллельной данной прямой и проходящей через данную точку A :
 - а) $y = 2x + 6$, $A(1; 3)$;
 - б) $y = -5x + 4$, $A(3; -2)$.
3. Запишите уравнение прямой и постройте эту прямую, если известно, что:
 - а) прямая проходит через начало координат и точку $(2; 3)$;
 - б) прямая пересекает ось абсцисс в точке с абсциссой 1 и проходит через точку $(2; -4)$;
 - в) прямая проходит через точки $(1; 5)$ и $(2; 7)$.

4. Найдите координаты точки пересечения прямых $y = 4x + 2$ и $y = 5x + 3$ и определите, проходит ли через эту точку прямая $y = 2x + 1$.
5. Определите, пересекаются ли три прямые $y = 2x + 1$, $y = 3x$, $y = -2x + 5$ в одной точке.
6. Запишите уравнение прямой, проходящей через точки A и B , и выясните, лежит ли на этой прямой точка C , если:
- а) $A(1; 2)$, $B(3; 4)$, $C(-3; -2)$;
 - б) $A(-2; 11)$, $B(2; 5)$, $C(-1; 6)$;
 - в) $A(2; 7)$, $B(-1; -8)$, $C(5; 22)$.
-
7. Докажите, что точки A , B , C лежат на одной прямой, если:
- а) $A(-3; -13)$, $B(0; -7)$, $C(2; -3)$;
 - б) $A(2; 3)$, $B(-4; 0)$, $C(6; 5)$;
 - в) $A(-3; 3)$, $B(3; -1)$, $C\left(2; -\frac{1}{3}\right)$.
8. Выясните, образуют ли данные прямые, пересекаясь, треугольник. Если да, то найдите координаты его вершин:
- а) $y = x$, $y = 2 - x$, $y = -2$;
 - б) $y = 3x - 2$, $y = 4x - 1$, $y = x - 4$;
 - в) $y = 3x + 4$, $y = -2x - 1$, $y = 1\frac{1}{3}x + 5\frac{2}{3}$.
9. Запишите уравнение прямой, симметричной прямой $y = 2x + 1$ относительно:
- а) оси ординат; б) оси абсцисс; в) начала координат.
10. Найдите значение a , такое, что:
- а) прямые $y = (2a + 7)x + 3$ и $y = ax - 6$ параллельны;
 - б) прямые $y = 2x + a$ и $y = 4x + 2$ пересекаются в точке, лежащей на оси абсцисс;
 - в) прямые $y = 2x + a + 2$ и $y = ax + 3$ пересекаются в точке, лежащей на оси ординат;
 - г) прямые $y = (a^2 - 4)x + 1$ и $y = (2a + 1)x - 5$ проходят через точку $(1; -2)$.
11. Найдите значение a , такое, что:
- а) прямые $y = 4x + 1$, $y = (a + 6)x + 3$ и $y = a^2x + 1$ параллельны;
 - б) прямые $y = ax - a + 2$, $y = (a + 2)x - 1$ и $y = 2ax$ проходят через точку $A(1; 2)$;

в) прямые $y = 2x + 4$, $y = ax + 6$ и $y = 4x + a + 5$ пересекаются в точке, лежащей на оси абсцисс;

г) прямые $y = 0$, $y = x$ и $y = a - x$, попарно пересекаясь, образуют треугольник, площадь которого равна четырем.

12. Найдите значение a , такое, что точки A , B и C лежат на одной прямой, если:

а) $A(1; 2)$, $B(4; 8)$, $C(a; 6)$;

б) $A(2; 5)$, $B(-1; a)$, $C(3; 7)$;

в) $A(0; 2)$, $B(1; a)$, $C(a; 5)$.

Проверь себя!

1. Пара чисел $(1; -8)$ является решением уравнения:

А. $x + 3y = 5$. Б. $x^2 + y^2 = -10$. В. $x^2 + y = -2$.

2. Уравнение $x + y = 11$:

А. Не имеет решений.

Б. Имеет бесконечно много решений.

В. Имеет ровно одно решение.

3. Графиком уравнения $x^2 + y^2 = 1$ является:

А. Прямая, параллельная оси абсцисс.

Б. Прямая, не параллельная оси абсцисс.

В. Не прямая.

4. На рисунке 9 изображен график уравнения $y = kx + l$, где:

А. $k > 0$, $l < 0$.

Б. $k < 0$, $l > 0$.

В. $k > 0$, $l = 0$.

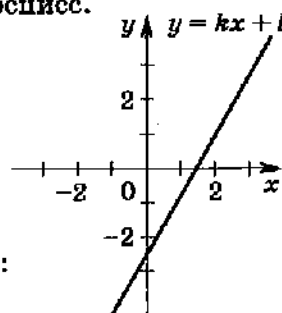


Рис. 9

5. Прямые $y = 2x + 3$ и $4x - 2y = -6$:

А. Пересекаются.

Б. Параллельны.

В. Совпадают.

6. Справедливо следующее утверждение о системах уравнений $\begin{cases} 5x + 3y = -2 \\ 2x - 7y = -9 \end{cases}$ и $\begin{cases} x - y = -2 \\ 7x - y = -8 \end{cases}$:

А. Одна и та же пара чисел является их решением.

Б. Каждая из систем имеет одно решение, эти решения различны.

В. Обе системы не имеют решений.

7. Прямые $2x + 3y = -2$ и $3y - 5x = 26$:

А. Пересекаются в точке $(-4; 2)$.

Б. Пересекаются в точке $(4; -3\frac{1}{3})$.

В. Не пересекаются.

8. Гуманитарную помощь в размере 100 тыс. р. планировалось распределить между 28 студентами, при этом предполагалось каждому выдавать либо по 4 тыс. р., либо по 3 тыс. р.

А. Так сделать нельзя.

Б. Так сделать можно, причем 4 тыс. р. получают больше 15 человек.

В. Так сделать можно, причем 3 тыс. р. получают больше 13 человек.

9. Система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x - y = 1 \end{cases}$ имеет:

А. Ровно одно решение.

В. Больше двух решений.

Б. Ровно два решения.

10. Таких чисел a , что система уравнений $\begin{cases} y - 2x = 5 \\ 2y = ax + 10 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений:

А. Ровно одно.

Б. Бесконечно много.

В. Нет.

⦿ В Б В А В А А Б Б А

Глава 5. Функции

О-30. Чтение графиков

1. На рисунке 10 изображен график, показывающий, как менялся курс рубля по отношению к единице национальной валюты некой страны по дням в течение кризиса в этой стране. Используя этот график, ответьте на вопросы:

а) Каков был курс рубля в начале периода наблюдения?

б) Были ли периоды стабилизации курса?

в) Были ли периоды падения курса рубля?

г) Удалось ли центральному банку этой страны добиться в рассматриваемый период возвращения к исходному курсу своей валюты?

д) Когда падение курса этой национальной валюты было особенно сильным?

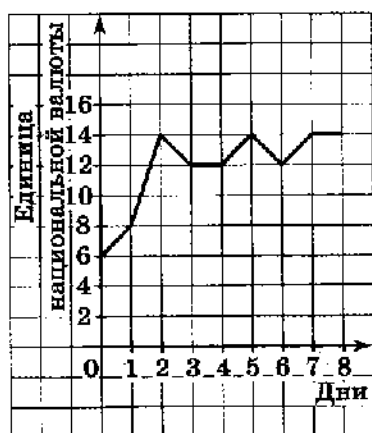


Рис. 10

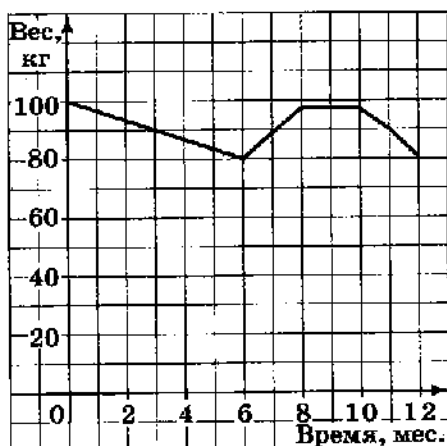


Рис. 11

2. Женя решил похудеть и сел на диету. На рисунке 11 изображен график, показывающий, как менялся его вес в течение года. Используя этот график, ответьте на вопросы:

а) Каков был вес Жени в начале года?

б) На сколько ему удалось похудеть к концу года?

в) Как вы считаете, были ли в течение года периоды, когда Женя допускал серьезные нарушения диеты?

г) Когда Женя худел быстрее всего?

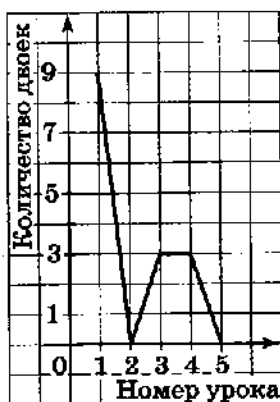


Рис. 12

3. На каждом уроке алгебры учитель отмечает, сколько двоек поставил. Результаты его наблюдений в течение пяти уроков показаны на рисунке 12. Используя график, ответьте на вопросы:

а) Сколько двоек было поставлено на первом уроке?

б) Были ли уроки, на которых была поставлена только одна двойка?

в) Как вы считаете, можно ли утверждать, что учитель оценивал работу учащихся на каждом уроке?

г) Как можно объяснить результаты второго урока (приведите несколько вариантов объяснения)?

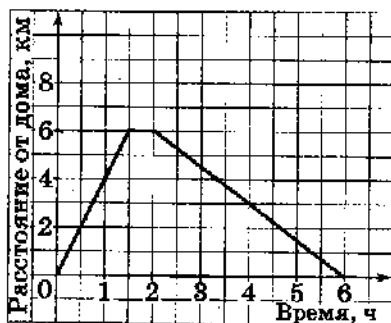


Рис. 13

4. Человек идет по прямолинейному шоссе. На рисунке 13 изображен график, показывающий изменение расстояния от человека до его дома, находящегося на этом шоссе. Опишите путь этого человека. Вычислите скорость его движения на каждом участке пути.
5. На рисунке 14, а, б изображены графики, показывающие изменение числа правонарушений в двух городах по дням недели (в сотнях). Ответьте на вопросы:
 - а) Когда число правонарушений было наименьшим в каждом из городов?
 - б) Как вы считаете, можно ли утверждать, что конец недели — наиболее спокойное время в этих городах?
 - в) В каком из городов совершается больше правонарушений за неделю?
6. Когда фирма открылась, на ее счету было 1 млн р. Через полгода на счету у нее было вдвое больше, а через год — больше еще на 1,5 млн р. В следующие полгода счет оставался неизменным, а еще через полгода фирма разорилась. Изобразите описанное на графике.
7. Население поселка строителей стремительно росло, пока все вакансии не оказались заполненными, а через некоторое время выяснилось, что работы надо заканчивать, и постепенно поселок опустел. На каком из графиков, приведенных на рисунке 15, а—в, изображена описанная ситуация?
8. Часовой отходит на 4 м влево от своей будки, потом с той же скоростью возвращается и идет на 4 м вправо от будки, потом опять влево, потом опять вправо и т. д. На рисунке 16, а—в изображены графики функций. Какая из этих функций моделирует движение часового? Приведите пример какого-либо другого процесса из жизни, который можно считать периодическим.

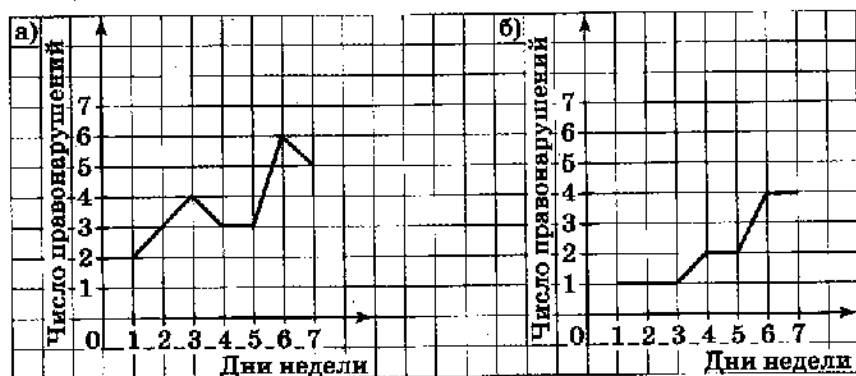


Рис. 14

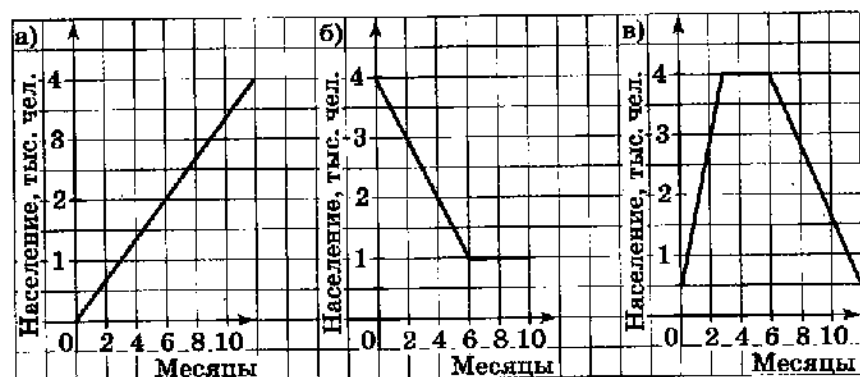


Рис. 15

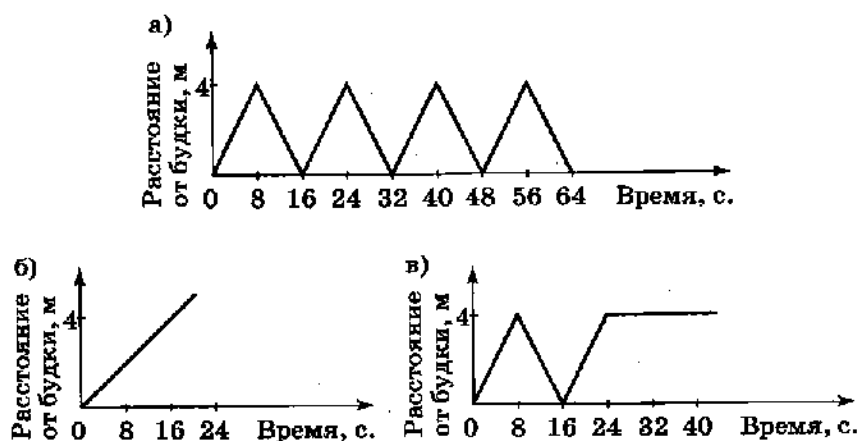


Рис. 16

9. Пешеход и велосипедист отправились из пункта А в пункт В по одному и тому же прямолинейному шоссе и через некоторое время до него добрались. На рисунке 17 изображены графики их движения. Ответьте на вопросы:

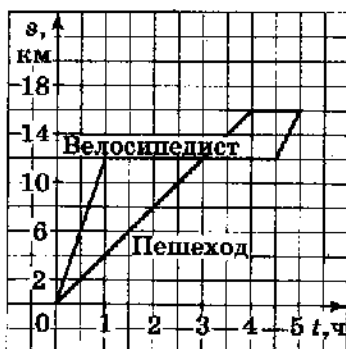


Рис. 17

- а) Каково расстояние между пунктами А и В?
 - б) Сколько раз велосипедист и пешеход встречались после начала движения?
 - в) Кто из них раньше прибыл в конечный пункт? На какое время?
 - г) Во сколько раз наибольшая за время движения скорость велосипедиста больше скорости пешехода?
10. Для регулирования объема воды в бассейне поставлены две одинаковые трубы. Сначала в течение 30 мин с помощью обеих труб воду заливали в бассейн, потом одну из труб выключили на 10 мин, затем включили ее на откачивание воды на 5 мин, а потом выключили трубу, качающую воду в бассейн, на 5 мин. Нарисуйте график, показывающий, как мог меняться объем воды в бассейне.

О-31. Что такое функция

1. Найдите значение функции:

- а) $y = 2x - 1$ для значения аргумента, равного 0; 1; 2; -1;
- б) $y = 2x^2 + 1$ для значения аргумента, равного -3; -1; 1; 5;
- в) $y = 3x^3 + x$ для значения аргумента, равного -2; -1; 0; 10;
- г) $y = \frac{2}{x}$ для значения аргумента, равного -10; -4; 0; 5; 15.

2. Дана функция $y = f(x)$. Используя функциональную символику, запишите следующие утверждения:

- а) если значение аргумента равно -2, то значение функции равно 11;

б) значение функции при значении аргумента, равном 5, больше, чем значение функции при значении аргумента, равном -3.

3. Дана функция $f(x) = x^3 + x$. Найдите:

а) $f(-3)$; б) $f(0)$; в) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; г) $f(5)$.

4. Даны функции $f(x) = x$ и $g(x) = x^2$. Сравните:

а) $f(1)$ и $g(1)$; в) $f(2)$ и $g(2)$;

б) $f(-1)$ и $g(-1)$; г) $f\left(\frac{1}{3}\right)$ и $g\left(\frac{1}{3}\right)$.

5. Найдите значение аргумента, при котором:

а) функция $y = 2x - 1$ принимает значение, равное 5;

б) функция $y = x^2 + 5x$ принимает значение, равное -4;

в) функция $y = \frac{1}{2x+3}$ принимает значение, равное 2.

6. Человек идет по дороге со скоростью 4 км/ч. За t ч он проходит S км. Задайте формулой функцию $y = S(t)$.

7. На счету в банке лежало 1000 р. Ежемесячно на коммунальные расходы снималось 100 р. Через x месяцев на счету осталось y р. Задайте формулой функцию $y = y(x)$. Найдите значение функции при значении аргумента, равном 2; 3; 4. Найдите значение аргумента, при котором значение функции равно нулю.

8. Площадь равностороннего треугольника со стороной x равна S . Задайте формулой функцию $y = S(x)$.

9. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = 3x + 2$; г) $y = x^7 + 2x - 3$;

б) $y = \frac{1}{x-2}$; д) $y = \frac{7x}{x^2 - 2x + 9}$;

в) $y = \frac{2}{x^2 - 1}$; е) $y = \frac{2x+3}{x-2} + \frac{3}{x-5}$.

10. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{при } x \geq 1 \\ -2x & \text{при } x < 1. \end{cases}$$

Найдите:

а) $f(2)$; б) $f(-3)$; в) $f(1)$; г) $f(0)$.

11. Дана функция $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{при } x > 3 \\ \frac{1}{x-4} & \text{при } x \leq 3. \end{cases}$ Найдите:

а) $f(2)$; б) $f(3)$; в) $f(4)$; г) $f(-4)$; д) $f(\sqrt{5})$; е) $f(\sqrt{11})$.

12. Дана функция $f(x) = x^2 + 2x + 1$. Найдите:

а) $f(\sqrt{3})$; б) $f(-\sqrt{2})$; в) $f(a)$; г) $f(2b)$; д) $f(a-1)$.

13. При каких значениях аргумента:

а) функция $y = x^2 - 7x + 5$ принимает значение, равное -7 ;

б) функция $y = x^4 - 4x^2$ принимает значение, равное 0 ;

в) функция $y = x^2 - 6x + 5$ принимает значение, равное -5 ;

г) функция $y = \frac{1}{x^2}$ принимает значение, равное 1 ?

14. Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{1}{x^4 - x^2}$;

б) $y = \sqrt{-x}$;

в) $y = \frac{1}{|2x-4|}$;

г) $y = \frac{x-2}{x^3+x}$;

д) $y = \begin{cases} \frac{x}{x^2-5x+6} & \text{при } x > 5 \\ x+3 & \text{при } x \leq 5; \end{cases}$

е) $y = \begin{cases} \frac{x+3}{x^2-4x-5} & \text{при } x < 2 \\ 3x-1 & \text{при } x \geq 2. \end{cases}$

15. Задайте формулой какую-нибудь функцию, область определения которой есть:

а) все действительные числа;

б) все действительные числа, кроме 2 ;

в) все действительные числа, кроме 2 и 3 ;

г) все неотрицательные действительные числа;

д) все неположительные действительные числа;

е) все действительные числа из отрезка $[0; 1]$;

ж) только одно число.

16. Задайте формулой какую-нибудь функцию, принимающую значение, равное 0 :

а) ровно один раз;

б) ровно два раза;

в) ровно три раза.

17. Продавец на рынке предлагает футболки по 200 р. за штуку, но если кто-то берет 10 футболок или больше, то тогда футболки продаются по 180 р. за штуку. Пусть x — число покупаемых футболок, а $S(x)$ — сумма, которую надо за них уплатить. Задайте с помощью формул функцию $y = S(x)$.

18. На рисунке 18 изображен многоугольник $ABCDE$, все стороны которого равны 1, а углы BAE и AED прямые. Проведите прямую, параллельную прямой AE и находящуюся от нее на расстоянии x ; $S(x)$ — площадь части многоугольника $ABCDE$, лежащей левее этой прямой. Задайте формулой функцию $y = S(x)$.

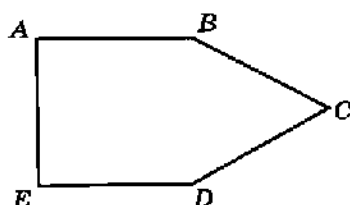


Рис. 18

О-32. График функции

1. Изобразите указанный промежуток на координатной прямой и обозначьте его:

а) $2 \leq x \leq 6$; б) $x > 4$; в) $-5 < x \leq 3$; г) $x \leq 5$.

2. Запишите указанные числовые промежутки с помощью неравенств:

а) $[1; +\infty)$; б) $(-3; 6)$; в) $(-\infty; 7)$; г) $[-5; 8]$.

3. Дана таблица значений функции $y = f(x)$:

x	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	0,5	0
y	-5	-4	-3	0	1	1	2	3	4

Постройте ее график.

4. Составьте таблицу значений функции и постройте ее график:

а) $y = x^2 + 2x$, где $-3 \leq x \leq 1$;

б) $y = 4x - x^2$, где $-1 \leq x \leq 4$.

5. Постройте график функции:

а) $y = x^2 + 3$, где $-2 \leq x \leq 2$;

б) $y = x^2 - 4x + 4$, где $-2 \leq x \leq 3$.

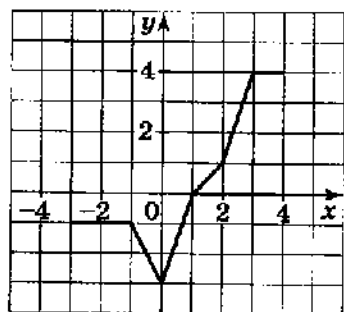


Рис. 19

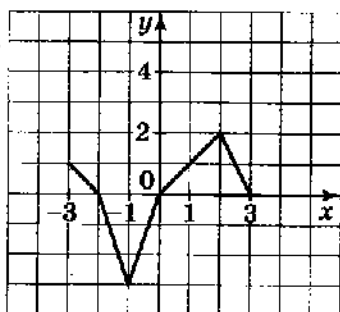


Рис. 20

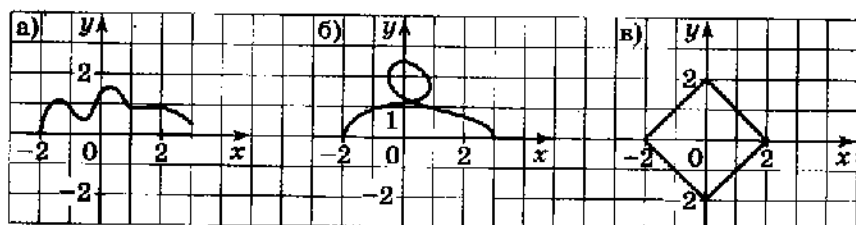


Рис. 21

6. На рисунке 19 изображен график функции. Найдите по графику:
 - а) значение функции, соответствующее значению аргумента, равному -3 ; -1 ; 2 ;
 - б) значения аргумента, соответствующие значению функции, равному -3 ; 0 ; 4 .
7. На рисунке 20 изображен график функции $y = f(x)$. Найдите по графику:
 - а) $f(-3)$, $f(0)$, $f(2)$;
 - б) значения x , при которых $f(x) = 2$, $f(x) = 0$, $f(x) = -3$.
8. Какие из графиков, изображенных на рисунке 21, а—в, являются графиками функций?
9. Для каждой из функций $y = 2x - 1$, $y = x^4 + 5x$, $y = \frac{2x+1}{4x-1}$ выясните, проходит ли ее график через:
 - а) начало координат;
 - б) точку с координатами $(1; 1)$.
10. Есть ли на графике функции $y = 2x - 7$ точка, ордината которой равна: а) 2 ; б) -3 ; в) 1 ; г) 0 ? Если есть, то чему равна ее абсцисса?

11. На рисунке 22 изображен график некоторой функции. Составьте по графику таблицу значений функции на промежутке $[0; 3]$ с шагом 0,5.

12. Задайте формулой какую-нибудь функцию, график которой проходит через начало координат.

13. Составьте таблицу значений функции и постройте ее график:

а) $y = x^3 + 2$;

б) $y = 1 - x^3$.

14. Постройте график какой-либо функции на отрезке $[-2; 2]$, такой, что областью ее определения является:

а) весь отрезок $[-2; 2]$;

б) весь отрезок $[-2; 2]$, кроме чисел 0 и 1.

15. а) Постройте график функции, заданной формулой $y = 2x - x^2$.

б) Начертите кривую, симметричную этому графику относительно оси абсцисс. Эта кривая — график некоторой функции. Задайте эту функцию формулой.

в) Начертите кривую, симметричную этому графику относительно оси ординат. Эта кривая — график некоторой функции. Задайте эту функцию формулой.

16. Нарисуйте график какой-либо функции:

а) симметричный относительно оси ординат;

б) симметричный относительно прямой $x = 1$;

в) симметричный относительно прямой $x = 1$ и оси ординат;

г) симметричный относительно оси абсцисс.

17. Нарисуйте график такой функции $y = f(x)$, на котором:

а) нет точек с ординатами, равными 2;

б) нет точек с ординатами больше 2.

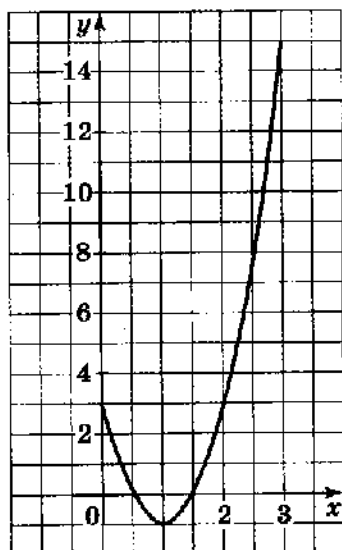


Рис. 22

18. Нарисуйте график какой-либо функции, у которой область определения есть отрезок $[-3; 3]$, а все значения:
- а) не меньше 2; б) принадлежат отрезку $[1; 8]$.
19. Докажите, что график функции:
- а) $y = x^6 + 2x^4 + 5$ целиком расположен в верхней полуплоскости;
 - б) $y = \frac{x^4 + 3}{x + 5}$ не пересекает ось абсцисс.
20. Задайте формулой какую-либо функцию, график которой:
- а) целиком лежит в верхней полуплоскости;
 - б) целиком лежит в нижней полуплоскости;
 - в) не пересекает ось абсцисс;
 - г) не пересекает ось ординат.

О-33. Свойства функции

1. На рисунке 23, а—в изображены графики функций на отрезке $[3; 3]$. Для каждой из них определите ее нули.
2. На рисунке 24, а—в изображены графики функций на отрезке $[-1; 3]$. Для каждой из них определите промежутки, на которых она возрастает и на которых она убывает.

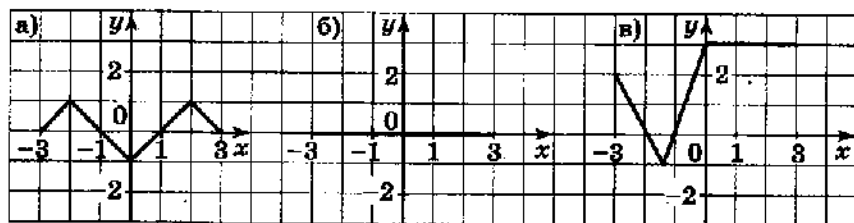


Рис. 23

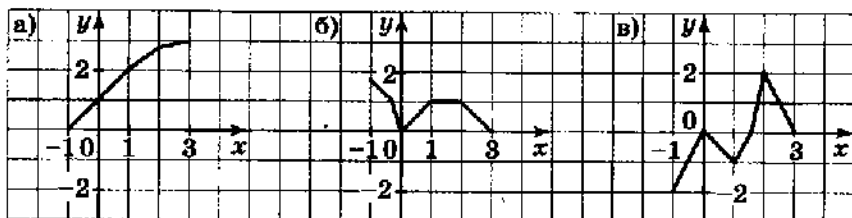


Рис. 24

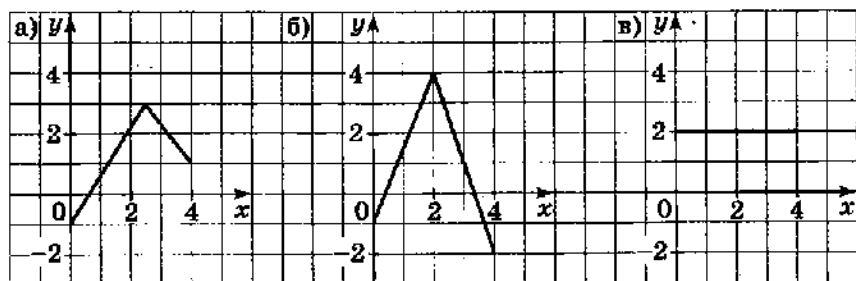


Рис. 25

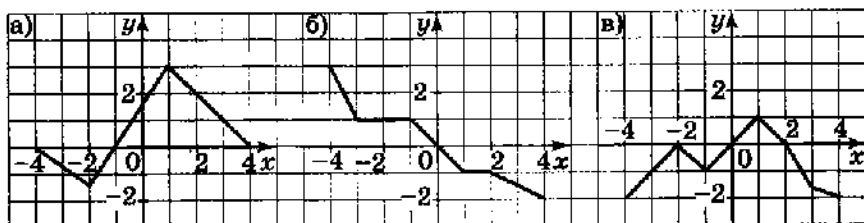


Рис. 26

3. На рисунке 25, а—в изображены графики функций на отрезке $[0; 4]$. Для каждой из них определите ее наибольшее и наименьшее значения.
4. На рисунке 26, а—в изображены графики функций на отрезке $[-4; 4]$. Для каждой из них определите:
 - а) область определения функции;
 - б) нули функции;
 - в) промежутки, в которых значения функции положительны, и промежутки, в которых значения функции отрицательны;
 - г) есть ли у функции наибольшее или наименьшее значение, и если есть, то чему оно равно и при каком значении аргумента функция принимает это значение;
 - д) промежутки, в которых функция возрастает, и промежутки, в которых функция убывает.
5. Нарисуйте график какой-либо функции, у которой нет наибольшего значения. Нарисуйте график какой-либо функции, у которой нет наименьшего значения.
6. Нарисуйте график какой-либо функции, возрастающей на всей числовой оси; убывающей на всей числовой оси.

7. Нарисуйте график какой-либо функции, определенной на отрезке $[-4; 4]$, возрастающей на отрезке $[-4; 0]$ и убывающей на отрезке $[0; 4]$.

8. Найдите нули функции:

а) $y = 2x + 11$;

в) $y = x^2 - 7x + 6$;

б) $y = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$;

г) $y = \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3}$.

9. Найдите нули функции $y = \frac{(x-1)(x+3)}{x-5}$. Верно ли, что на рисунке 27 изображен график этой функции?

10. Постройте график функции:

а) $y = 2 - x^2$; б) $y = x^2 + 3$.

Для каждой из этих функций определите, есть ли у нее наибольшее и наименьшее значения; есть ли у нее нули.

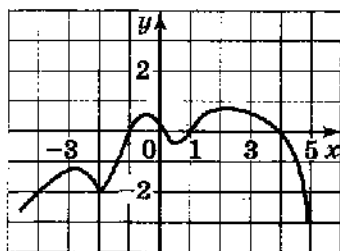


Рис. 27

11. Постройте график функции и определите промежутки ее возрастания и убывания:

а) $y = x^2 - 4$; б) $y = 3 - x^2$.

12. Найдите нули функции:

а) $y = x^4 - x^2$; в) $y = \begin{cases} x & \text{при } x > -1 \\ x + 3 & \text{при } x \leq -1; \end{cases}$

б) $y = x^4 - x^6$; г) $y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x < 1 \\ x + 5 & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$

13. Постройте график какой-либо функции $y = f(x)$, такой, что:

а) область определения функции — отрезок $[-2; 3]$, наибольшее значение равно 4, а наименьшее равно -1 ;

б) функция возрастает при $x \leq 2$, убывает при $x \geq 2$, а ее нулями являются числа 3 и -1 ;

в) область определения функции — отрезок $[0; 4]$, наибольшее значение равно 5, а наименьшее равно 1, и функция является возрастающей на всей области определения;

г) функция положительна на промежутке $[-4; 1)$, отрицательна на промежутке $(1; 3]$, убывает на отрезке $[-4; 2]$ и возрастает на отрезке $[2; 3]$;

д) функция возрастает при $x \leq 3$ и при $x \geq 5$, убывает при $3 < x < 5$, $f(3) = 2$, $f(5) = -1$.

14. а) Изобразите график какой-либо функции, убывающей на всей числовой оси и имеющей нуль при $x = 3$.
 б) Нарисуйте линию, симметричную этому графику относительно оси абсцисс. Эта линия — график некоторой функции. Определите ее промежутки возрастания и убывания. Найдите ее нули.
 в) Нарисуйте линию, симметричную этому графику относительно оси ординат. Эта линия — график некоторой функции. Определите ее промежутки возрастания и убывания. Найдите ее нули.
15. Определите, можно ли начертить график функции, такой, что функция:
 а) возрастает на всей числовой оси и имеет два нуля;
 б) убывает на всей числовой оси и все ее значения положительны;
 в) возрастает на промежутке $[0; 5]$ и принимает положительные значения на промежутке $[0; 3)$ и отрицательные значения на промежутке $(3; 5]$.
 Если да, то приведите примеры; если нет, объясните почему.

О-34. Линейная функция

Линейной называется функция, которую можно задать формулой вида

$$y = kx + l,$$

где k и l — некоторые числа.

График линейной функции — прямая.

Если $k > 0$, то функция **возрастающая**;

если $k < 0$, то функция **убывающая**;

если $k = 0$, то функция **постоянная**.

1. Какая из функций является линейной:

а) $y = 5,7$;

б) $y = 2x - 3$;

в) $y = x^2$;

г) $y = \frac{1}{x+3}$;

д) $y = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0; \end{cases}$

е) $y = \sqrt{x}$?

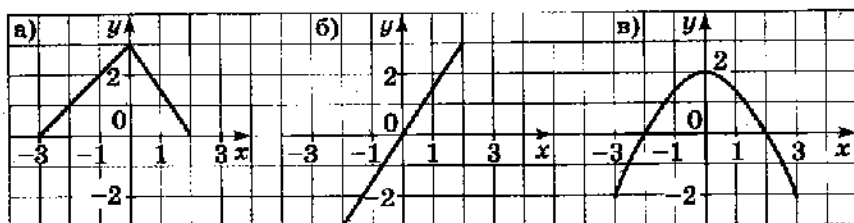


Рис. 28

2. На рисунке 28, а—в изображены графики функций. Какие из этих функций являются линейными?
3. Укажите, какие из данных функций являются возрастающими, какие — убывающими:
 - а) $y = 2x - 5$; г) $y = 3$;
 - б) $y = -3x - 2$; д) $y = -2 + 5x$;
 - в) $y = 5 - 4x$; е) $y = -2$.
4. Жора копит деньги на новый компьютер. У него уже есть 2000 р., кроме того, он устроился на работу и ежедневно откладывает по 100 р. Запишите формулу, выражающую зависимость накопленной суммы S от числа проработанных дней x . Является ли функция $y = S(x)$ линейной? Является ли она возрастающей?
5. Приведите пример какого-либо процесса, описываемого с помощью убывающей линейной функции.
6. Дана линейная функция $f(x) = 4x - 5$.
 - а) Найдите $f(3)$, $f(0)$, $f(-2)$.
 - б) Найдите значения x , при которых $f(x) = 3$, $f(x) = 5$, $f(x) = -3$.
7. Запишите какую-нибудь формулу, задающую линейную функцию, график которой проходит через указанную точку:
 - а) начало координат; б) $(1; 1)$.
8. Постройте график линейной функции. В каждом случае укажите: возрастающей или убывающей является функция; при каких значениях x значения функции равны нулю, больше нуля, меньше нуля:
 - а) $y = 0,5x + 4$; г) $y = -\frac{1}{7}x + 1$;
 - б) $y = -4x + 2$; д) $y = -0,8x$;
 - в) $y = \frac{1}{3}x + 2$; е) $y = 6x + 2$.

9. В одной системе координат постройте графики линейных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и определите значения x , при которых $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$, $f(x) > g(x)$:

а) $f(x) = 3x + 5$, $g(x) = -0,5x + 1,5$;

б) $f(x) = -x + 2$, $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

10. Дана функция $y = \begin{cases} 2x & \text{при } x > 0 \\ x - 3 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$

Найдите ее значения при $x = 1$; 3 ; 0 ; -2 .

11. Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} 3x & \text{при } x > 0 \\ x & \text{при } x \leq 0; \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} 4x + 3 & \text{при } x \geq -1 \\ x & \text{при } x < -1; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} x - 3 & \text{при } x \geq 0 \\ -3 & \text{при } x < 0; \end{cases}$ д) $y = \begin{cases} 1 & \text{при } x \leq 0 \\ -1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} 2 & \text{при } x > 1 \\ x + 1 & \text{при } x \leq 1; \end{cases}$

12. Для каждой из следующих ситуаций запишите требуемую формулу и ответьте, задает ли она линейную функцию:

а) В баке 10 л воды, каждую минуту в бак поступает еще 4 л. Объем в баке через t мин равен V л. Составьте формулу, выражающую V через t ($t \leq 10$).

б) Площадь квадрата со стороной a равна S . Составьте формулу, выражающую S через a .

в) Длина прямоугольника равна 10 см, а ширина — x см. Площадь прямоугольника S см². Составьте формулу, выражающую S через x .

г) Пешеход вышел из дома и шел по прямолинейному шоссе в одном направлении со скоростью 4 км/ч. Через t ч он прошел s км. Составьте формулу, выражающую s через t ($t \leq 5$).

д) Пешеход вышел из дома и шел по прямолинейному шоссе в одном направлении со скоростью 4 км/ч. Через 3 ч он сделал часовой привал, а потом продолжал свой путь еще в течение 3 ч. Путь, пройденный им за t ч, равен s км. Составьте формулу, выражающую s через t .

13. На рисунке 29 изображен график изменения суммы денег (S) на счету некой фирмы (в условных единицах) в течение одного года. Ответьте на вопросы:

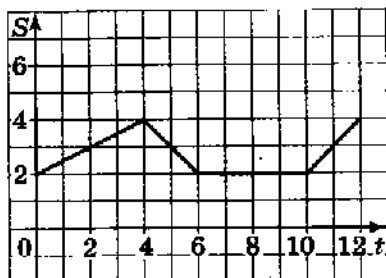


Рис. 29

а) Можно ли выразить зависимость величины S от времени t в течение первых четырех месяцев с помощью линейной функции?

б) Верно ли, что скорость изменения величины S в течение первых четырех месяцев не менялась?

в) Можно ли найти какие-либо шесть месяцев, в течение которых получится выразить зависимость величины S от времени t с помощью линейной функции?

14. Постройте график функции:

$$\begin{aligned} \text{а) } y &= \begin{cases} -2x + 5 & \text{при } x \geq 1 \\ 3 & \text{при } 0 < x < 1 \\ x + 3 & \text{при } x \leq 0; \end{cases} \\ \text{б) } y &= \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq 0 \\ 3x + 1 & \text{при } -2 < x < 0 \\ -5 & \text{при } x \leq -2; \end{cases} \\ \text{в) } y &= \begin{cases} 4x & \text{при } x > 2 \\ x - 3 & \text{при } x \leq 2; \end{cases} \\ \text{г) } y &= \begin{cases} -4x - 4 & \text{при } x \geq -1 \\ x + 2 & \text{при } x < -1. \end{cases} \end{aligned}$$

15. В одной системе координат постройте графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и определите значения x , при которых $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$, $f(x) > g(x)$:

а) $f(x) = 3x$, $g(x) = x^2$;

б) $f(x) = -x^2$, $g(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$;

в) $f(x) = x$, $g(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{при } x < 2 \\ 3x - 6 & \text{при } x \geq 2. \end{cases}$

16. С помощью графиков определите, есть ли наибольшее и наименьшее значения у функции:

а) $y = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 3 \\ 5 - x & \text{при } x < 3; \end{cases}$

$$б) y = \begin{cases} 4 + x & \text{при } x \leq 2 \\ 2 - x & \text{при } x > 2; \end{cases} \quad в) y = \begin{cases} 2 & \text{при } x < -2 \\ -x & \text{при } -2 \leq x \leq 2 \\ -2 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

17. Пешеход вышел из дома и пошел по прямолинейному шоссе, делая иногда привалы. На рисунке 30 изображен график его движения. По горизонтальной оси откладывается время движения, по вертикальной — расстояние от точки, где находится пешеход, до точки начала движения. Выразите формулами зависимость скорости пешехода от времени. Постройте график его скорости.

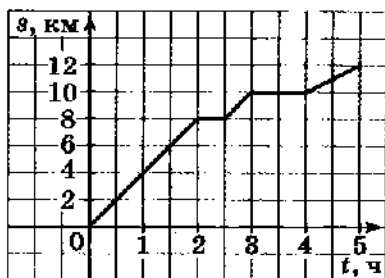


Рис. 30

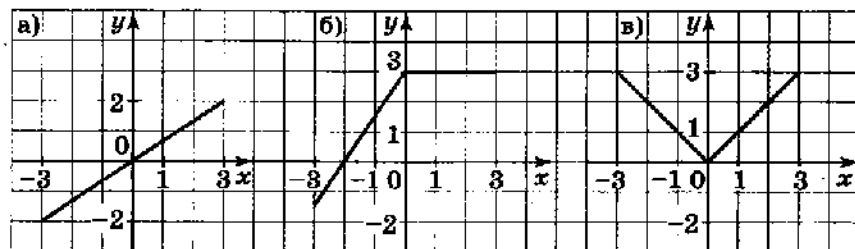


Рис. 31

18. На рисунке 31, а—в изображены графики функций на отрезке $[-3; 3]$. Запишите формулы, которыми задаются эти функции.

О-35. Функция $y = \frac{k}{x}$ и ее график

Функцию, заданную формулой вида $y = \frac{k}{x}$, называют обратной пропорциональностью. Ее график называют гиперболой.

При $k > 0$ функция $y = \frac{k}{x}$ убывает на промежутках $x > 0$ и $x < 0$, принимает положительные значения при $x > 0$ и отрицательные значения при $x < 0$.

При $k < 0$ функция $y = \frac{k}{x}$ возрастает на промежутках $x > 0$ и $x < 0$, принимает положительные значения при $x < 0$ и отрицательные значения при $x > 0$.

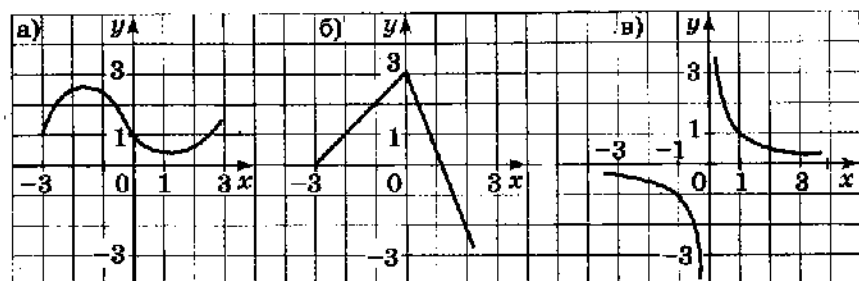


Рис. 32

1. На рисунке 32, а—в изображены графики нескольких функций. Есть ли среди них гиперболы?
2. Укажите, какую из функций можно назвать обратной пропорциональностью:

а) $y = \frac{3}{x}$; б) $y = x^2$; в) $y = -\frac{1}{5x}$;

б) $y = 2x + 4$; г) $y = -\frac{5}{x}$; е) $y = \frac{3}{11x}$.

3. Функция задана формулой $f(x) = \frac{4}{x}$.

а) Заполните таблицу:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$									

б) Постройте график функции.

4. Постройте график функции:

а) $y = \frac{2}{x}$; б) $y = -\frac{4}{x}$; в) $y = -\frac{1}{2x}$; г) $y = \frac{1}{2x}$.

Для каждой из этих функций, пользуясь графиком, определите промежуток, на котором ее значения положительны; значения $f(1)$, $f(-0,5)$, $f(4)$; значение x , при котором значение функции равно -2 .

5. Определите, является ли функция возрастающей на луче $x > 0$:

а) $y = -\frac{7}{x}$; б) $y = \frac{8}{x}$; в) $y = -\frac{4}{9x}$; г) $y = \frac{3}{2x}$.

6. Для каждой из функций $y = -\frac{6}{x}$, $y = \frac{2}{x}$, $y = -\frac{1}{4x}$ определите с помощью графиков:

а) промежутки, в которых она положительна, и промежутки, в которых она отрицательна;

б) промежутки, в которых она возрастает, и промежутки, в которых она убывает.

7. При каких значениях x значения функций $y = \frac{2}{x}$, $y = -\frac{6}{x}$, $y = \frac{1}{5x}$ равны: 2; 5; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{12}$; 100; -200?

8. Найдите число k , такое, что график функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку с координатами:

а) $(-1; -1)$; б) $(1; -2)$; в) $(2; \frac{1}{2})$.

9. Можно ли найти число k , такое, что график функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точки с координатами:

а) $(1; 1)$ и $(-2; -1)$; в) $(-2; 1)$ и $(-1; -\frac{1}{2})$?

б) $(1; 2)$ и $(-\frac{1}{2}; -4)$;

10. Можно ли найти число k , такое, что график возрастающей на промежутках $x < 0$ и $x > 0$ функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку с координатами:

а) $(1; -2)$; б) $(2; 3)$; в) $(-2; -\frac{1}{6})$?

11. В одной координатной плоскости постройте графики заданных функций и найдите координаты их точек пересечения:

а) $y = \frac{4}{x}$ и $y = 2x - 2$;

б) $y = -\frac{5}{x}$ и $y = x - 6$.

12. Для каждой из следующих ситуаций запишите требуемую формулу и ответьте, задает ли она обратную пропорциональность:

а) Некто в течение года откладывал ежемесячно 50 р.; $S(t)$ — сумма, накопленная им таким образом за t месяцев. Составьте формулу, выражающую величину S через t .

б) Сумму в 5 млн р. планируют раздать поровну n людям, при этом каждому из них достанется по S р. Составьте формулу, выражающую величину S через n .

в) Сила в 1000 Н производит давление P на поверхность, площадь которой S (расположенную перпендикулярно направлению действия силы). Составьте формулу, выражающую величину P через S .

13. Постройте график функции:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y = \begin{cases} -\frac{3}{x} & \text{при } x > 0 \\ -x & \text{при } x \leq 0; \end{cases} & \text{в) } y = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{при } x > 0 \\ -\frac{3}{x} & \text{при } x < 0; \end{cases} \\ \text{б) } y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \geq 0 \\ \frac{4}{x} & \text{при } x < 0; \end{cases} & \text{г) } y = \begin{cases} -\frac{1}{2x} & \text{при } x > 0 \\ \frac{1}{3x} & \text{при } x < 0. \end{cases} \end{array}$$

14. При каких x значения функции $y = \frac{2}{x}$:

а) больше 0,2; б) меньше $\frac{1}{4}$; в) меньше -2?

15. При каких x значения функции $y = -\frac{1}{6x}$:

а) больше $\frac{1}{20}$; б) меньше 0,4; в) больше -6?

16. График функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку с координатами $(-2; 6)$. Найдите число k .

17. Определите, сколько общих точек имеют графики функций $y = 2 - x$ и $y = \frac{1}{4x}$.

18. Подберите число k таким образом, чтобы график функции $y = \frac{k}{x}$:

а) не пересекал окружность $x^2 + y^2 = 1$;

б) имел с окружностью $x^2 + y^2 = 1$ четыре общие точки.



Проверь себя!

1. Велосипедист едет по прямолинейному шоссе из пункта А в пункт В. На рисунке 33 изображен график зависимости расстояния от него до пункта А. Быстрее всего он ехал:

- А. Первые полчаса.
Б. Последние полчаса.
В. В течение второго часа.

2. Пусть $f(x) = x^2 + 4x - 1$. Значение $f(0)$ равно:

- А. -1. Б. 4. В. $\frac{2}{3}$.

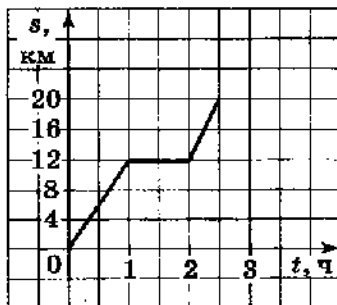
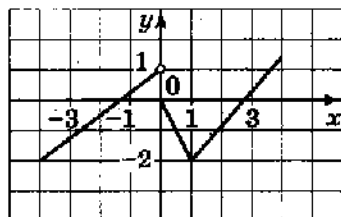


Рис. 33

3. Областью определения функции $y = \frac{2x-4}{x+1}$ являются:
- А. Все числа, кроме $x = 2$.
 - Б. Все числа, кроме $x = -1$.
 - В. Все числа, кроме $x = 2$ и $x = -1$.

4. Пусть $f(x) = x^2 - 4x$. Справедливо утверждение:
- А. Единственным нулем функции является число 0.
 - Б. У функции нет нулей.
 - В. Нулями функции являются числа 0 и 4.

5. На рисунке 34 изображен график функции на отрезке $[-4; 4]$. Какое утверждение верно для этой функции?



- А. Наибольшее значение равно 1,5.
- Б. Наибольшее значение равно 4.
- В. Нет наибольшего значения.

Рис. 34

6. Функция $y = 5x - 2$ принимает положительные значения при:

- А. $x > 0,4$.
- Б. $x < \frac{2}{5}$.
- В. $x = 0$.

7. Дана функция $y = -\frac{2}{x}$. Справедливо утверждение:

- А. При $0 < x < 2$ функция убывает, а при $x \geq 2$ она возрастает.
- Б. При $x > 0$ функция убывает.
- В. При $x > 0$ функция возрастает.

8. Значение функции $y = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{при } x < 2,5 \\ \frac{7}{x} & \text{при } x \geq 2,5 \end{cases}$ при $x = \sqrt{7}$ равно:

- А. 8.
- Б. $\sqrt{7}$.
- В. 2,5.

9. Функция $y = \begin{cases} 3 - x & \text{при } x < 0 \\ 1 & \text{при } x = 0 \\ x + 2 & \text{при } x > 0 \end{cases}$

- А. Не имеет наименьшего значения.
- Б. Имеет наименьшее значение, равное 2.
- В. Имеет наименьшее значение, равное 1.

10. Графики функций $y = \frac{1}{x}$ и $y = ax$ пересекаются при:
А. $a < 0$. Б. $a = 0$. В. $a > 0$.



Б А Б В А А В Б В В

Глава 6. Вероятность и статистика

О-36. Решение комбинаторных задач (повторение)

1. Для новогодних подарков были закуплены коробки конфет пяти сортов и коробки печенья трех сортов. Сколько есть способов составить новогодний подарок из одной коробки конфет и одной коробки печенья?
2. На выборах в законодательное собрание по одному из округов было выдвинуто 4 кандидатуры. Кандидаты должны договориться о порядке выступлений на предвыборном собрании (кто будет говорить первым, кто следующим и т. д.). Сколько есть способов распределить очередность их выступлений?
3. Пятеро друзей едут из гостей домой. Четверо могут поехать на автомобиле, а пятому придется ехать на автобусе. Сколько существует способов отобрать четырех человек, которые поедут на автомобиле?
4. На выборах в законодательное собрание по одному из округов было выдвинуто 4 кандидатуры. Сколько есть вариантов отобрать двоих победителей в первом туре голосования?
5. За неделю Женя должен сдать три зачета: по алгебре, по литературе и по истории. Сколько имеется вариантов получения им трех оценок (за зачет ставятся оценки: «2», «3», «4», «5»)?
6. Отправляясь следить за преступниками, Шерлок Холмс достал 5 париков и 3 накладные бороды. Сколько различных способов маскировки с использованием и парика, и бороды есть у Холмса?
7. Жили в квартире сорок четыре, сорок четыре веселых чижа. И было у них 44 различных дела. Сколько существует способов распределить эти дела (каждому чижу по одному делу)?

8. К зачету было дано 20 вопросов. Сколько различных билетов из двух вопросов (билеты считаются различными, если в них есть несовпадающие вопросы) можно составить?
9. В законодательном собрании города 35 депутатов. Надо выбрать председателя собрания, его первого и второго заместителей. Сколько есть способов это сделать?
10. За хорошее выполнение домашнего задания первокласснику рисуют на полях тетради звездочку, а за плохое — нолик. Всего было 8 домашних заданий. Сколько имеется способов поставить 8 соответствующих значков?
11. На выборах были выдвинуты кандидатуры Андреева, Борисова, Васильева, Григорьева, Дмитриева, Евгеньева. Шестеро сослуживцев: Алексеев, Богданов, Викторov, Гаврилов, Дементьев и Евдокимов — поспорили, за кого голосовать: выяснилось, что у всех разные мнения и что Алексеев призывает не голосовать за Андреева. Сколько есть способов такого распределения мнений шестерых сослуживцев?
12. Сколько существует четырехзначных чисел, последняя цифра которых не 7?
13. У Люды 6 открыток с видами Москвы, Нью-Йорка, Парижа, Праги, Рима и Чикаго. Она хочет выбрать две и подарить их Жене, но так, чтобы на выбранных открытках были виды городов одного континента. Сколько у нее способов это сделать?

О-37. Статистические характеристики

Среднее арифметическое n чисел — это частное от деления на n суммы всех этих чисел.

Мода ряда чисел — это число, наиболее часто встречающееся в ряду.

Размах ряда чисел — это разность между наибольшим и наименьшим числом в ряду.

Медиана ряда, состоящего из *нечетного* количества чисел, — это число данного ряда, которое окажется посередине (если этот ряд упорядочить по возрастанию или убыванию).

Медиана ряда, состоящего из *четного* количества чисел, — это среднее арифметическое двух средних чисел данного ряда (если этот ряд упорядочить по возрастанию или убыванию).

1. Дан упорядоченный ряд чисел:

а) 1; 2; 2; 3; 4; 5; 5; 5;

б) 1; 1; 2; 3; 4; 5; 6;

в) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$.

Для каждого из них найдите среднее арифметическое, размах, моду и медиану.

2. Найдите среднее арифметическое, размах, моду и медиану ряда чисел:

а) 1; 2; 5; 2; 3; 4; 2;

б) 1; 2; 0,2; 0,2; 1; 0,2; 2; 2.

3. Мальчики из 8Б класса стали следить, кого сколько раз вызывали по алгебре. Результаты их наблюдений за месяц приведены в следующей таблице:

Фамилия	Количество вызовов	Фамилия	Количество вызовов
Алексеев	15	Захаров	1
Бенедиктов	3	Иванов	0
Викторов	2	Кондратьев	5
Геннадьев	7	Львов	5
Давыдов	5	Михайлов	0
Елисеев	1		

Найдите размах, среднее арифметическое, моду и медиану полученного ряда.

4. В таблице показано, сколько тяжких правонарушений было совершено в некотором населенном пункте в различные годы:

Год	Число правонарушений	Год	Число правонарушений
2002	3	2006	6
2003	10	2007	7
2004	6	2008	8
2005	10		

Найдите моду, медиану, размах и среднее арифметическое полученного ряда.

5. Шесть сотрудников отдела обсуждали, кто сколько раз ходил на выборы за последние пять лет. Соответствующие данные приведены в таблице:

Фамилия	Количество походов	Фамилия	Количество походов
Андреев	8	Григорьев	0
Борисов	0	Дмитриев	0
Васильев	2	Евдокимов	2

Определите:

- а) сколько раз в среднем участвовали в выборах сотрудники этого отдела (среднее арифметическое);
б) сколько раз участвовал в выборах «средний» сотрудник этого отдела (медиану);
в) как чаще всего поступали сотрудники отдела (моду).
6. За четверть Люда получила по алгебре пять двоек, четыре четверки и две пятерки. Ее мама считает, что за четверть Люде надо ставить двойку, папа считает, что надо ставить тройку, а сама Люда считает, что надо ставить четверку. Попробуйте привести аргументы в пользу каждой точки зрения. (Какие статистические характеристики вычисляет каждый член семьи?) Какую бы оценку вы поставили Люде?
7. Известно, что размах ряда равен нулю. Сравните моду, медиану и среднее арифметическое ряда.
-
8. Известно, что размах ряда равен 1, а его медиана равна 2. Может ли его мода быть равна:
а) 2; б) 4; в)* 1?
- 9*. Размах ряда равен 1, его среднее арифметическое равно 2. Может ли медиана быть равна 3?
- 10*. Известно, что среднее арифметическое ряда равно 2, а его медиана равна 3. Может ли его мода быть равна 1?
11. В классе 27 человек. За контрольную работу пятеро получили двойки, шестеро — тройки, двое — пятерки, а остальные — четверки. Найдите моду, медиану и среднее арифметическое оценок.

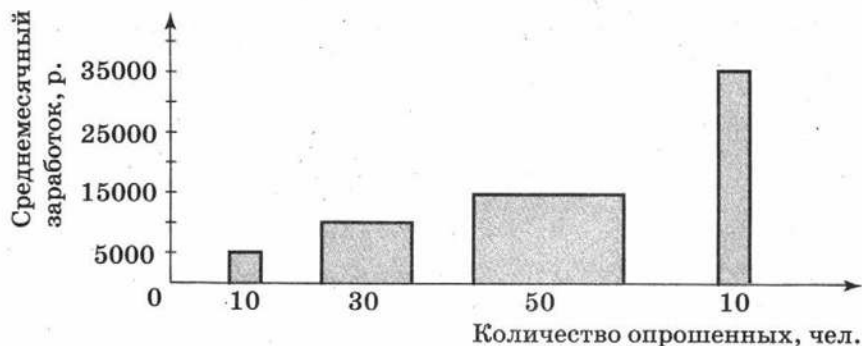


Рис. 35

12. Сто человек были опрошены, каков их среднемесячный заработок. Ответы представлены на гистограмме, приведенной на рисунке 35.

а) Сколько денег в среднем получает один человек из этой группы? (Найдите среднее арифметическое ряда данных.)

б) Сколько денег получает ежемесячно «средний» человек из этой группы? (Найдите медиану этих данных.)

в) Какой заработок является наиболее распространенным у членов этой группы? (Найдите моду этих данных.)

г) Представьте эти данные в виде таблицы частот.

О-38. Вероятность равновозможных событий

Пусть ровно m из n равновозможных исходов приводит к наступлению события A . Тогда вероятность $P(A)$ случайного события A равна $\frac{m}{n}$.

1. Ответьте, равновероятны ли следующие события:

а) 1 июля 2010 г. температура в Москве будет -50°C ;
1 июля 2010 г. температура в Москве будет выше -50°C .

б) Наудачу выбранная цифра окажется цифрой 5; наудачу выбранная цифра окажется отличной от цифры 5.

в) При бросании трех монет выпало три орла;
при бросании трех монет выпало три решки.

г) При бросании игрального кубика выпала «шестерка»; при бросании игрального кубика выпала не «шестерка».

д) Среди наудачу отобранных из восьмиклассников вашей школы четырех дежурных было ровно три мальчика;

среди наудачу отобранных из восьмиклассников вашей школы четырех дежурных была ровно одна девочка.

е) При бросании двух игральных кубиков сумма выпавших очков оказалась равной 2;

при бросании двух игральных кубиков сумма выпавших очков оказалась равной 5.

ж) Выигрышными в спортлото оказались номера 1, 2, 3, 4, 5, 6;

выигрышными в спортлото оказались номера 3, 7, 11, 19, 21, 28.

2. Для каждого из следующих событий найдите число всех возможных исходов, число благоприятных исходов и вычислите вероятность:

а) В коробке лежит 6 красных и 7 синих карандашей. Наугад выбирают один из них. Какова вероятность взять синий карандаш?

б) На клавиатуре 47 клавиш — 10 с цифрами, остальные с буквами и знаками. Наугад нажимают одну клавишу. Какова вероятность, что нажата будет клавиша с цифрой?

3. В классе 12 мальчиков и 13 девочек. Какова вероятность того, что случайным образом назначенный дежурный окажется мальчиком?

4. В вазочке перемешаны 15 конфет «Мишка на Севере» и 5 конфет «Белочка». Не глядя, Женя взял одну конфету. Какова вероятность, что ему досталась «Белочка»?

5. Наудачу выбрано двузначное число. Какова вероятность того, что оно окажется:

а) четным; б) кратным 3; в) меньшим 12?

6. В классе 30 человек. Вероятность того, что при случайном выборе одного ученика по номеру в классном журнале выбранным окажется мальчик, равна $\frac{1}{3}$. Сколько в этом классе девочек?

7. В кошельке лежит три монеты достоинством в 5 р., в 2 р. и в 1 р. Случайным порядком их вынимают из кошелька. Какова вероятность того, что сначала вынут пятирублевую, потом двухрублевую, затем рублевую монеты?
 8. Наудачу выписывают цифры 1, 2, 3 и 4 (не повторяя). Какова вероятность того, что при этом будет написано число 1234?
-
9. Сережа и Лена учатся в классе, в котором 25 человек. Для проведения собрания ребята решили случайным порядком выбрать председателя и секретаря. Какова вероятность того, что председателем выберут Сережу, а секретарем — Лену?
 10. Том Сойер выучил наизусть 2 стихотворения из 80 заданных, а Гекльберри Финн — только одно из заданных. Какова вероятность того, что ими выучены три разных стихотворения?
 11. Наудачу выбрано число от 1 до 10 000. Какова вероятность того, что оно не делится на 10?
 12. В погребе у хозяина трактира стоит 100 бутылок бургундского, 50 бутылок бордо и 20 бутылок шампанского. Мухометов, наудачу забросив лассо, вытаскивает одну бутылку. Какова вероятность того, что он вытащил шампанское? Какова вероятность того, что он вытащил бутылку бургундского? Какое наименьшее количество бутылок ему надо вытащить, чтобы вероятность того, что среди вытащенных бутылок есть бутылка бордо, была равна 1?
 13. Женя забыл номер телефона Светы (семизначный) и поэтому стал набирать телефон наудачу с закрытыми глазами. Какова вероятность того, что он с первой же попытки дозвонится до Светы?
 14. Люда и Света написали по одной цифре. Какова вероятность того, что написанные цифры окажутся одинаковыми?

О-39. Сложные эксперименты

1. Для каждого из следующих событий выпишите все возможные исходы, укажите их число, найдите число благоприятных исходов и вычислите вероятность.

- Монету бросают три раза. Какова вероятность того, что:
- а) орел выпадет ровно один раз;
 - б) орел выпадет ровно два раза;
 - в) орел выпадет не меньше двух раз?
2. Кубик бросают два раза. Какова вероятность того, что:
- а) будет набрано больше 11 очков;
 - б) будет набрано больше 10 очков;
 - в) будет набрано меньше 4 очков?
3. На клавиатуре 47 клавиш, наугад последовательно нажимают две клавиши. Какова вероятность того, что набранным окажется слово «ум»?
4. На клавиатуре 47 клавиш — 10 с цифрами, остальные с буквами и знаками. Наугад последовательно нажимают две клавиши. Какова вероятность того, что набранными окажутся две цифры?
5. Имеется три листа бумаги, на каждом из которых надо написать латинскую букву A, B или C. Буквы пишут наудачу. Какова вероятность того, что при этом будет написано A, A, A?
-
6. Монету бросают 6 раз. Какова вероятность того, что орел выпадет все 6 раз?
7. Кубик бросают 4 раза. Какова вероятность того, что все 4 раза выпадет «шестерка»?
8. На каждой клетке шахматной доски случайным порядком пишется 0 или 1. Какова вероятность того, что:
- а) сумма всех написанных чисел равна 64;
 - б) сумма всех чисел, написанных в столбце «а», равна 8;
 - в) сумма всех написанных чисел равна 63?
9. Один учитель решил ставить оценки, бросая кубик, — какая цифра выпадет, такова и оценка; если же выпала «шестерка», то кубик бросается еще раз, причем если и в этот раз выпадет «шестерка», то ставится оценка «5». Какова вероятность получения пятерки при таких правилах?
10. Наудачу выписываются цифры 1, 2, 3, 5 (без повторений). Какова вероятность того, что:
- а) получившееся четырехзначное число будет больше 5300;
 - б) получившееся число будет четным;
 - в) в получившемся числе цифры 2 и 3 будут стоять подряд (сначала 2, потом 3)?

О-40. Геометрические вероятности

Пусть фигура F_1 содержится в фигуре F . Тогда вероятность попадания в фигуру F_1 при условии попадания в фигуру F равна отношению площадей $\frac{S(F_1)}{S(F)}$.

1. На рисунке 36 изображена квадратная мишень $ABCD$, разбитая на 9 равных квадратиков. Стрелок, не целясь, стреляет в мишень и попадает. Сравните вероятности попадания в правый верхний, центральный и левый нижний квадратики.
2. На рисунке 37 изображена квадратная мишень $ABCD$. Стрелок, не целясь, стреляет в нее и попадает. Какова вероятность того, что он попал в треугольник AOB ?
3. На рисунке 38 изображена мишень $ABCDEF$. Стрелок, не целясь, стреляет в нее и попадает. Какова вероятность того, что он попал в квадрат $BCEF$? в равносторонний треугольник CDE ? в равносторонний треугольник BAF ?
4. На рисунке 39 изображена квадратная мишень $ABCD$ и некоторые фигуры на ней, причем $AD = 1$, $AN = \frac{1}{4}$. Стрелок, не целясь, стреляет в мишень и попадает. Известно, что при этом вероятность попадания в прямоугольник $ABMN$ равна вероятности попадания в треугольник KCD . Найдите длину отрезка KD .
5. Дана квадратная мишень $ABCD$. Отметьте на ней две такие фигуры, что: а) вероятность попадания хотя бы в одну из них при условии попадания в мишень равна 1;

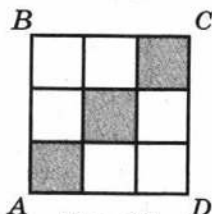


Рис. 36

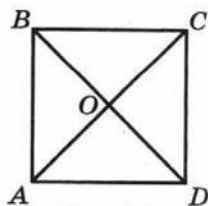


Рис. 37

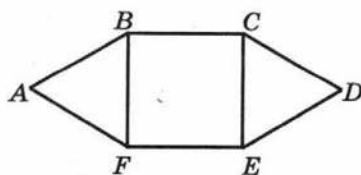


Рис. 38

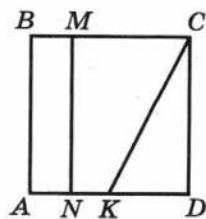


Рис. 39

- б) вероятность попадания в обе фигуры одновременно при условии попадания в мишень равна нулю;
 в) при условии попадания в мишень вероятность попадания хотя бы в одну из фигур равна 1, а вероятность одновременного попадания в обе фигуры равна $\frac{1}{4}$.
6. Случайным образом выбирают пару чисел x и y , таких, что $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$. Определите вероятность того, что при этом выполняются неравенства

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$$

Для этого:

- а) изобразите множество точек с координатами x и y , такими, что $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$ (фигуру F);
 б) изобразите множество точек с координатами x и y , такими, что $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ (фигуру F_1);
 в) найдите отношение площадей фигур F_1 и F .
7. Случайным образом выбирают пару чисел x и y , таких, что $-1 \leq x \leq 3$, $2 \leq y \leq 4$. Определите вероятность того, что при этом выполняются неравенства

$$0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 3.$$

8. Брошенная наугад фишка попадает в фигуру, изображенную на рисунке 40. Какова вероятность того, что она попадет в закрашенную часть фигуры?
9. Случайным образом выбирают пару чисел x и y , таких, что $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 4$. Установите, существуют ли такие числа a и b , что вероятность того, что при этом выборе выполняются неравенства $-a \leq x \leq a$ и $-b \leq y \leq b$, равна:
 а) 0,5; б) $\frac{2}{3}$; в) 0,75.
10. На рисунке 41 изображен квадрат $ABCD$, M — середина стороны AB . Случайным образом выбирают точку X квадрата и проводят луч CX . Какова вероятность того, что построенный луч пересечет отрезок MB ?

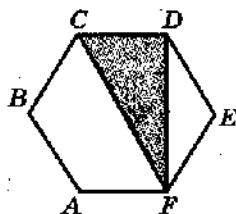


Рис. 40

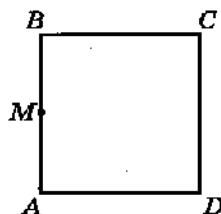


Рис. 41



1. Рассматривается ряд чисел: 1; 2; -3; 5; 5. Их среднее арифметическое равно:
А. 5. Б. 2. В. -3.
2. Рассматривается ряд чисел: 5; 1; 7; 3; 7; 9. Справедливо утверждение:
А. Его мода и медиана совпадают.
Б. Его медиана меньше моды.
В. Его мода меньше медианы.
3. Двадцать сотрудников учреждения получают в месяц 4000 р., восемнадцать сотрудников — 8000 р., а двое сотрудников — по 96 000 р. Зарплата «среднего» сотрудника (медиана рассматриваемого ряда) составляет в месяц:
А. 6000 р. В. Не может быть определена в данном случае.
Б. 8000 р.
4. Случайным образом выбирают одного сотрудника этого же учреждения. Неравновозможными являются события:
А. Зарплата выбранного сотрудника больше 6000 р.; зарплата выбранного сотрудника меньше 6000 р.
Б. Зарплата выбранного сотрудника меньше 4000 р.; зарплата выбранного сотрудника больше 96 000 р.
В. Зарплата выбранного сотрудника 4000 р.; зарплата выбранного сотрудника 8000 р.
5. Случайным образом подчеркивают одну из букв в слове «медиана». Вероятность того, что подчеркнута гласная, будет:
А. Равна $\frac{3}{4}$. Б. Равна $\frac{4}{7}$. В. Не определена.
6. Случайным образом отбирают сотрудников учреждения, о котором шла речь в заданиях 3 и 4. Наименьшее количество сотрудников, которое надо отобрать, чтобы с вероятностью, равной 1, среди них был сотрудник, получающий не больше 4000 р. в месяц, равно:
А. 20. Б. 38. В. 21.
7. На рисунке 42 изображена мишень. Стрелок, не целясь, стреляет по мишени и по-

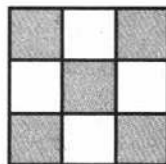


Рис. 42

падает в нее. Вероятность того, что он при этом попал в закрашенный квадратик, равна:

- А. $\frac{5}{9}$. Б. $\frac{1}{2}$. В. $\frac{1}{3}$.

8. Случайным образом выбирают пару чисел x и y , таких, что $2 \leq x \leq 5$, $3 \leq y \leq 7$. Вероятность того, что при этом выполняются неравенства

$$4 \leq x \leq 5 \text{ и } 6 \leq y \leq 7,$$

равна:

- А. $\frac{6}{7}$. Б. $\frac{2}{5}$. В. $\frac{1}{12}$.

9. Рассматривается такой ряд из пяти чисел, что вероятность того, что при случайном выборе числа из ряда окажется выбранным число 5, равна 0,8. Справедливо утверждение:

А. Медианой ряда является число 0,8.

Б. Медианой ряда является число 5.

В. Медиану ряда нельзя однозначно определить по данным условиям.

10. Рассматривается ряд из пяти чисел, такой, что его модой является число 4, и равновероятно, что при случайном выборе числа из ряда выбранным окажется число 1, число 2 и число 3. Размах этого ряда:

А. Равен 3.

В. Нельзя однозначно определить

Б. Равен 4.

по данным условиям.



Б Б А В Б В А В Б В

Дополнительная обучающая работа

О-41*. Уравнения с параметрами

1. Решите уравнение при данных значениях параметра a :

а) $(a - 2)x = a + 5$ при $a = -3$, $a = 2$, $a = 4,5$;

б) $(a^2 - 2a)x = a^2 - a - 6$ при $a = -2$, $a = 0$, $a = 2$, $a = 5$;

в) $(a - 1)x^2 + 2ax + 3a - 2 = 0$ при $a = 2$, $a = 1$, $a = 6$, $a = 1,5$;

г) $\sqrt{x - 1} = a - 2$ при $a = 3$, $a = 2$, $a = 1$;

д) $|x + 2a| = a - 1$ при $a = -2$, $a = 1$, $a = 3$.

2. Решите уравнение относительно x при всех возможных значениях параметра:

а) $a - x - a^2 = -2 - a^2x$; г) $p^2 - 4px = 4x + p + 2$;

б) $x - 3 = 3a + 2ax$; д) $m^2x = m - 2mx$.

в) $cx - c = 2x + 1$;

Для уравнения д) ответьте на вопросы:

Какой корень у данного уравнения при $m = -2\frac{1}{14}$?

При каких значениях параметра m корнем данного уравнения является число $\frac{1}{7}$?

Решение. а) $a^2x - x = a^2 - a - 2$,

$$(a^2 - 1)x = a^2 - a - 2, \quad (1)$$

$a^2 - 1 = 0$, если $a = 1$ или $a = -1$.

При $a = 1$ уравнение (1) примет вид $0 \cdot x = -2$. Такое уравнение не имеет корней.

При $a = -1$ уравнение (1) примет вид $0 \cdot x = 0$. Любое число является корнем такого уравнения.

При $a \neq \pm 1$ $a^2 - 1 \neq 0$ и обе части уравнения (1) можно разделить на $a^2 - 1$:

$$x = \frac{a^2 - a - 2}{a^2 - 1}, \quad x = \frac{(a - 2)(a + 1)}{(a - 1)(a + 1)}, \quad x = \frac{a - 2}{a - 1}.$$

Ответ. При $a = 1$ не имеет корней, при $a = -1$ имеет корнем любое число, при $a \neq \pm 1$ $x = \frac{a - 2}{a - 1}$.

Дополнительные вопросы

Какой корень у данного уравнения при $a = 3,5$?

$$x = \frac{3,5 - 2}{3,5 - 1}, \quad x = \frac{1,5}{2,5}, \quad x = \frac{3}{5}.$$

При каких значениях параметра a корнем данного уравнения является число 5?

1-й способ. При $a = -1$ число 5 является корнем этого уравнения. Найдём другие значения a :

$$\frac{a - 2}{a - 1} = 5, \quad \frac{a - 2}{a - 1} - 5 = 0, \quad \frac{a - 2 - 5a + 5}{a - 1} = 0, \quad \frac{3 - 4a}{a - 1} = 0, \quad a = \frac{3}{4}.$$

2-й способ. Подставим в данное уравнение $x = 5$. Равенство $a - 5 - a^2 = -2 - 5a^2$ должно быть верным, т. е.

$$4a^2 + a - 3 = 0, \quad a = -1 \text{ или } a = \frac{3}{4}.$$

3. а) При каких значениях параметра a имеет единственный корень уравнение $ax^2 + x - 1 = x^2 + 2ax - a$?

б) При каких значениях параметра m имеет единственный корень уравнение $mx^2 - (m-1)x + \frac{1}{4}m + 2 = 0$?

Решение. а) $ax^2 + x - 1 - x^2 - 2ax + a = 0$,

$$(a-1)x^2 - (2a-1)x + (a-1) = 0. \quad (2)$$

Заметим, что при $a=1$ уравнение (2) не квадратное:

$$0 \cdot x^2 + x - 1 = 0,$$

$$x - 1 = 0,$$

$x=1$ — единственный корень.

При $a \neq 1$ уравнение квадратное и имеет единственный корень, если дискриминант равен 0.

$$\begin{aligned} D &= (2a-1)^2 - 4(a-1)(a-1) = \\ &= 4a^2 - 4a + 1 - 4a^2 + 8a - 4 = 4a - 3, \end{aligned}$$

$$4a - 3 = 0,$$

$$a = \frac{3}{4}.$$

Действительно, при $a = \frac{3}{4}$ уравнение (2) примет вид

$$-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0,$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0,$$

$$(x+1)^2 = 0,$$

$$x = -1,$$

-1 — единственный корень.

Ответ. а) При $a=1$ и $a = \frac{3}{4}$; б) при $m=0$ и $m=0,1$.

4. Существуют ли значения параметра a , при которых уравнение $(a^3-4)x^2 - (a^2-2a)x + a^2-a-2=0$ имеет более двух корней?

Ответ. Да, при $a=2$.

5. Дано уравнение $|2x-5|=p+2$.

а) Решите его при $p=3$; $p=-5$; $p=-2$.

б) При каких значениях параметра p корнем этого уравнения является число 2?

6. Решите относительно x уравнение $\sqrt{ax-2}=3$.

7. При каких значениях параметра p уравнение

$$\sqrt{(p-2)x^2 - 2(p+3)x + p} = 2$$

имеет единственный корень?

Ответ. При $p=2$ и $p=-\frac{1}{12}$.

Раздел II. ПРОВЕРОЧНЫЕ РАБОТЫ

Глава 1. Алгебраические дроби

П-1. Алгебраические дроби

Вариант 1

1. Найдите значение дроби $\frac{a+3c}{c}$ при $a = 12$, $c = -2$.
2. Найдите значение переменной, при котором значение дроби $\frac{2x-6}{x+2}$ равно 0. Сделайте проверку.
3. Правда ли, что при $c = -2$ данная дробь не имеет смысла:
а) $\frac{2}{c^2-4}$; б) $\frac{3}{-2c+4}$?
4. Существуют ли значения m , при которых дробь $\frac{m^2+1}{m-2}$ равна 0?

Вариант 2

1. Найдите значение дроби $\frac{2x-y}{x}$ при $x = -4$, $y = -16$.
2. Найдите значение переменной, при котором значение дроби $\frac{3a-9}{a+1}$ равно 0. Сделайте проверку.
3. Правда ли, что при $c = -2$ данная дробь не имеет смысла:
а) $\frac{3}{4-c^2}$; б) $\frac{2}{-3c+6}$?
4. Существуют ли значения m , при которых дробь $\frac{m^2+3}{m-1}$ равна 0?

П-2. Основное свойство дроби

Вариант 1

1. Разделите числитель и знаменатель дроби на указанное число:
а) $\frac{18a}{15b}$ на 3; б) $\frac{18a+6c}{15b}$ на 3.

2. Умножьте числитель и знаменатель дроби на указанное число:

а) $\frac{2a}{3b}$ на a ; б) $\frac{2a-5c}{3b}$ на a ; в) $\frac{0,2a - \frac{1}{2}b}{0,1c}$ на 10.

Вариант 2

1. Разделите числитель и знаменатель дроби на указанное число:

а) $\frac{14m}{21n}$ на 7; б) $\frac{14m-35p}{21n}$ на 7.

2. Умножьте числитель и знаменатель дроби на указанное число:

а) $\frac{3m}{4n}$ на n ; б) $\frac{3m-2p}{4n}$ на n ; в) $\frac{\frac{1}{5}m - 0,3n}{0,1p}$ на 10.

П-3. Приведение дробей к новому знаменателю и сокращение дробей

Вариант 1

1. Приведите дробь к указанному знаменателю:

а) $\frac{3x^2}{5y^2} = \frac{\quad}{15xy^2}$; б) $\frac{2x}{x-2y} = \frac{\quad}{3x-6y}$; в) $\frac{3}{a-b} = \frac{\quad}{a^2-b^2}$.

2. Сократите дробь:

а) $\frac{7a^2b}{14a^3}$; б) $\frac{d(a-b)}{c(b-a)}$.

Вариант 2

1. Приведите дробь к указанному знаменателю:

а) $\frac{5a^2}{4c^2} = \frac{\quad}{12ac^2}$; б) $\frac{3a}{a+3c} = \frac{\quad}{2a+6c}$; в) $\frac{5}{x+y} = \frac{\quad}{x^2-y^2}$.

2. Сократите дробь:

а) $\frac{16x^3}{8x^2y}$; б) $\frac{m(x-y)}{p(y-x)}$.

П-4. Сокращение дробей

Вариант 1

Сократите дробь:

а) $\frac{m^2 \cdot m}{2m^2}$; б) $\frac{m^2 + m}{2m^2}$; в) $\frac{m^2 - m}{m^3 - m^2}$; г) $\frac{m^2 - 4}{m^2 - 2m}$; д) $\frac{3m - 9}{15 - 5m}$.

Вариант 2

Сократите дробь:

а) $\frac{3a^2}{a^2 \cdot a^2}$; б) $\frac{3a^2}{a - a^2}$; в) $\frac{a^2 - a^3}{a \cdot a^2}$; г) $\frac{9 - a^2}{3a - a^2}$; д) $\frac{2a - 4}{14 - 7a}$.

П-5. Сложение и вычитание дробей

Вариант 1

Замените данное выражение одной дробью:

а) $\frac{16}{5x} + \frac{4}{5x}$; г) $\frac{4x - 5}{6x - 3} + \frac{7x - 9}{6x - 3} - \frac{9x - 13}{6x - 3}$;

б) $\frac{5a + 2}{a^3} - \frac{3a + 2}{a^3}$; д) $\frac{3a - 5b}{a - b} + \frac{2a - 4b}{b - a}$.

в) $-\frac{4 - m}{2m^2} + \frac{6 - m}{2m^2}$;

Вариант 2

Замените данное выражение одной дробью:

а) $\frac{17}{6x} + \frac{7}{6x}$; г) $\frac{3x + 5}{8x - 4} - \frac{5x - 7}{8x - 4} + \frac{4x - 13}{8x - 4}$;

б) $\frac{6a - 5}{a^3} - \frac{2a - 5}{a^3}$; д) $\frac{7a - 8b}{b - a} + \frac{6a - 7b}{a - b}$.

в) $-\frac{7 + m}{3m^2} + \frac{10 + m}{3m^2}$;

П-6. Сложение и вычитание дробей

Вариант 1

Упростите выражение:

а) $\frac{3}{5x^2y} - \frac{2}{3xy^2}$; г) $\frac{6}{5a - 10} - \frac{2}{3a - 6}$;

б) $\frac{4}{y^2 - 4} - \frac{1}{y - 2}$; д) $\frac{1}{x^2 - xy} - \frac{1}{xy - y^2}$.

в) $-\frac{2}{a + b} + \frac{3a + 3b}{a^2 + 2ab + b^2}$;

Вариант 2

Упростите выражение:

а) $\frac{2}{3x^2y^2} - \frac{3}{5x^3y^2}$;

г) $\frac{5}{4a+8} - \frac{1}{3a+6}$;

б) $\frac{1}{y-3} - \frac{6}{y^2-9}$;

д) $\frac{1}{ab-b^2} - \frac{1}{a^2-ab}$.

в) $-\frac{3}{c-d} + \frac{4c-4d}{c^2-2cd+d^2}$;

П-7. Сложение и вычитание дробей

Вариант 1

Преобразуйте в одну дробь выражение:

а) $\frac{b-a}{a^2b} + \frac{3a+b}{ab^2} - \frac{3a^2-4b^2}{a^2b^2}$;

б) $\frac{x}{2x-2} - \frac{3}{2x+2} + \frac{x-2}{x^2-1}$.

Вариант 2

Преобразуйте в одну дробь выражение:

а) $\frac{5x^2-7y^2}{x^2y^2} - \frac{5x+y}{xy^2} + \frac{x-y}{x^2y}$;

б) $\frac{2-a}{1-a^2} - \frac{3}{2+2a} - \frac{a}{2-2a}$.

П-8. Умножение, деление и возведение в степень

Вариант 1

Упростите выражение:

а) $\frac{3a^7}{10b^{10}} \cdot \frac{15b^3}{12a^5} : \frac{a^3}{b^6}$; б) $\frac{2a-b}{3c} \cdot \frac{5c}{b-2a}$; в) $\frac{2x+6y}{5a-5b} : \frac{3x+9y}{7a-7b}$.

Вариант 2

Упростите выражение:

а) $\frac{15a^3}{2b^5} : \frac{b^3}{7a^6} \cdot \frac{b^7}{21a^{10}}$; б) $\frac{3a-c}{5b} : \frac{c-3a}{7b}$; в) $\frac{3m-9n}{2a+2b} \cdot \frac{5a+5b}{4m-12n}$.

П-9. Умножение, деление **и возведение в степень**

Вариант 1

Упростите выражение:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{x^2 - 4y^2}{a^2 + 2ab + b^2} \cdot \frac{b + a}{2y - x}; & \text{в) } \frac{a^3 - 8b^3}{c^2 - d^2} : \frac{a^2 + 2ab + 4b^2}{c - d}; \\ \text{б) } (3m - 6n) : \frac{5m - 10n}{m + n}; & \text{г) } \left(\frac{a^2 b^3}{c^4} \right)^2 : \left(\frac{a^3 b^2}{-c^2} \right)^3. \end{array}$$

Вариант 2

Упростите выражение:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{a^2 - 2ab + b^2}{9x^2 - y^2} : \frac{b - a}{3x - y}; & \text{в) } \frac{8c^3 + d^3}{a^2 - b^2} \cdot \frac{a - b}{4c^2 - 2cd + d^2}; \\ \text{б) } \frac{3c - 6d}{c + d} : (5c - 10d); & \text{г) } \left(\frac{a^3 b^2}{c^2} \right)^6 : \left(\frac{-a^6 b^3}{c^4} \right)^3. \end{array}$$

П-10. Все действия **с алгебраическими дробями**

Вариант 1

Докажите, что верно равенство:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \frac{7 - a}{5a - 2} - \frac{3}{3a - 1} : \frac{5a - 2}{9a^2 - 1} = -2; \\ \text{б) } \left(\frac{3}{x - 1} - \frac{2}{x + 1} \right) \cdot \frac{1 - x^2}{x^2 + 5x} = -\frac{1}{x}. \end{array}$$

Вариант 2

Докажите, что верно равенство:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \frac{4m + 7}{3m - 1} - \frac{5}{2m - 1} : \frac{3m - 1}{4m^2 - 1} = -2; \\ \text{б) } \left(\frac{2}{a - 2} - \frac{3}{a + 2} \right) \cdot \frac{4 - a^2}{10a - a^2} = -\frac{1}{a}. \end{array}$$

П-11. Все действия **с алгебраическими дробями**

Вариант 1

Упростите выражение:

а) $\frac{10-3m}{m+2} - \frac{6-5m}{m+2} + \frac{m}{m+2} \cdot \frac{m^2-4}{m}$;

б) $\left(a - \frac{a^2+2}{a-1}\right) \cdot \frac{1-2a+a^3}{a+2}$.

Вариант 2

Упростите выражение:

а) $\frac{3x-4}{x+1} - \frac{2x-5}{x+1} + \frac{x}{x+1} : \frac{x}{x^2-1}$;

б) $\left(a - \frac{a^2-3}{a-2}\right) : \frac{3-2a}{4-4a+a^2}$.

П-12. Определение степени **с целым показателем**

Вариант 1

1. Вычислите:

а) 8^{-2} ; б) $(0,2)^{-1}$; в) $(2,47)^0$; г) $2^{-1} - 4^{-1}$; д) -13^0 .

2. Замените выражение равным ему выражением, не содержащим отрицательного показателя:

а) b^{-3} ; б) ab^{-3} ; в) $(ab)^{-3}$; г) $(a+b)^3$; д) $-a^{-1}$.

Вариант 2

1. Вычислите:

а) 5^{-2} ; б) $(0,5)^{-1}$; в) $(3,28)^0$; г) $3^{-1} - 6^{-1}$; д) -15^0 .

2. Замените выражение равным ему выражением, не содержащим отрицательного показателя:

а) y^{-4} ; б) xy^{-4} ; в) $(xy)^{-4}$; г) $(x-y)^{-2}$; д) $-x^{-2}$.

П-13. Стандартный вид числа

Вариант 1

1. Запишите в виде степени числа 10:

а) 0,01; б) 1000; в) 1; г) $\frac{1}{10000}$; д) 1 000 000.

2. Запишите в стандартном виде число:

а) 3200; б) 28; в) 0,432; г) 0,0007; д) 2; е) $\frac{1}{2}$.

Вариант 2

1. Запишите в виде степени числа 10:

а) 100; б) 0,1; в) $\frac{1}{1000}$; г) 1; д) 10 000.

2. Запишите в стандартном виде число:

а) 32; б) 28 000; в) 0,000163; г) 0,08; д) 3; е) $\frac{3}{4}$.

П-14. Свойства степени **с целым показателем**

Вариант 1

1. Представьте в виде степени:

а) $x^{-3} \cdot x^5$; в) $m^{-3} : m^{-6}$; д) $\frac{(c^3)^{-2} \cdot c^{10}}{c^{-4} \cdot (c^{-1})^{-7}}$
б) $a^{-7} \cdot a^{-2}$; г) $(m^{-3})^{-2}$;

2. Запишите каждое число в виде степени числа 2, 3 или 5:

4; $\frac{1}{4}$; 27; $\frac{1}{27}$; 25; $\frac{1}{125}$; 1.

Вариант 2

1. Представьте в виде степени:

а) $a^3 \cdot a^{-5}$; в) $a^{-8} : a^{-6}$; д) $\frac{(c^{-5})^{-1} \cdot c^{-7}}{c^8 \cdot (c^{-3})^3}$
б) $x^{-3} \cdot x^{-6}$; г) $(x^2)^{-4}$;

2. Запишите каждое число в виде степени числа 2, 3 или 5:

8; $\frac{1}{8}$; 9; $\frac{1}{9}$; 125; $\frac{1}{25}$; 1.

П-15. Решение задач

Вариант 1

От пункта *A* до пункта *B* пешеход шел со скоростью 4 км/ч и затратил на этот путь такое же время, как на путь от пункта *C* до пункта *D*. От пункта *C* до пункта *D* он шел со скоростью 5 км/ч, а расстояние от пункта *C* до пункта *D* на 2 км больше расстояния от *A* до *B*. Чему равно расстояние от пункта *A* до пункта *B*?

Вариант 2

Расстояние от пункта *A* до пункта *B* пешеход прошел со скоростью 4 км/ч, а от пункта *B* до пункта *A* — со скоростью 5 км/ч. Поэтому на обратную дорогу он затратил на полчаса меньше, чем на дорогу от *A* до *B*. Чему равно расстояние от пункта *A* до пункта *B*?

Глава 2. Квадратные корни

П-16. Квадратные корни

Вариант 1

1. Вычислите:

а) $\sqrt{49}$; б) $\sqrt{0,64}$; в) $\sqrt{2500}$; г) $\sqrt{\frac{4}{81}}$; д) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; е) $\sqrt{6^2 + 8^2}$.

2. Найдите значение выражения $\sqrt{3a + 16}$ при $a = 0$,
 $a = 16$, $a = -5,17$.

Вариант 2

1. Вычислите:

а) $\sqrt{16}$; б) $\sqrt{3600}$; в) $\sqrt{0,49}$; г) $\sqrt{\frac{25}{64}}$; д) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$; е) $\sqrt{10^2 - 6^2}$.

2. Найдите значение выражения $\sqrt{16 - 3a}$ при $a = 0$,
 $a = -16$, $a = 5,17$.

П-17. Квадратные корни

Вариант 1

1. Вычислите, используя таблицу квадратов чисел:

а) $\sqrt{169}$; в) $\sqrt{8,41}$; д) $\sqrt{289 - 64}$;
б) $\sqrt{841}$; г) $\sqrt{16900}$; е) $\sqrt{85^2 - 84^2}$.

2. Найдите значения выражений $\sqrt{x+y}$ и $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ при $x = 0,64$, $y = 2,25$.

Вариант 2

1. Вычислите, используя таблицу квадратов чисел:
а) $\sqrt{324}$; в) $\sqrt{8,24}$; д) $\sqrt{289 - 225}$;
б) $\sqrt{441}$; г) $\sqrt{44100}$; е) $\sqrt{145^2 - 144^2}$.
2. Найдите значения выражений $\sqrt{x-y}$ и $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ при $x = 2,89$, $y = 0,64$.

П-18. Квадратные корни

Вариант 1

1. Какие из чисел являются рациональными, а какие — иррациональными:
а) $\sqrt{1,21}$; б) $\sqrt{120}$; в) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$; г) $\sqrt{2^2 + 3^2}$?
2. Сравните числа:
а) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{15,9}$ и 4; д) $\sqrt{8} - \sqrt{10}$ и 0.
б) $\sqrt{7}$ и 3; г) $\sqrt{0,3}$ и 0,5;

Вариант 2

1. Какие из чисел являются рациональными, а какие — иррациональными:
а) $\sqrt{1,44}$; б) $\sqrt{130}$; в) $\sqrt{12\frac{1}{4}}$; г) $\sqrt{3^2 - 2^2}$?
2. Сравните числа:
а) $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$; в) $\sqrt{9,3}$ и 3; д) $\sqrt{15} - \sqrt{17}$ и 0.
б) $\sqrt{15}$ и 4; г) $\sqrt{0,2}$ и 0,4;

П-19. Уравнения вида $x^2 = a$

Вариант 1

Решите уравнение:

- а) $x^2 = 81$; г) $3(x^2 - 2x - 4) = -2(x^2 + 3x + 6)$;
б) $x^2 = 91$; д) $(x - 2)^2 = 16$.
в) $2x^2 + 84 = 0$;

Вариант 2

Решите уравнение:

- а) $x^2 = 64$; г) $-2(x^2 - 3x - 9) = 3(x^2 + 2x + 6)$;
б) $x^2 = 74$; д) $(x + 2)^2 = 25$.
в) $3x^2 + 57 = 0$;

П-20. Преобразования выражений, содержащих корни

Вариант 1

Упростите выражение:

- а) $2(\sqrt{11} - \sqrt{7}) - 3\left(\sqrt{11} - \frac{2}{3}\sqrt{7}\right)$; г) $(\sqrt{3} - 1)(2 + \sqrt{3})$;
б) $\sqrt{27} - \sqrt{48}$; д) $\frac{\sqrt{2} - 5}{4} - \frac{1 - \sqrt{2}}{6}$.
в) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} - \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} + \sqrt{17^2} - \sqrt{(-153)^2}$;

Вариант 2

Упростите выражение:

- а) $3(\sqrt{17} - \sqrt{13}) - 2\left(\sqrt{17} - \frac{3}{2}\sqrt{13}\right)$; г) $(\sqrt{2} - 1)(3 + \sqrt{2})$;
б) $\sqrt{45} - \sqrt{20}$; д) $\frac{\sqrt{3} - 5}{6} - \frac{1 - \sqrt{3}}{4}$.
в) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{18} - \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} + \sqrt{19^2} - \sqrt{(-187)^2}$;

П-21. Преобразования выражений, содержащих корни

Вариант 1

1. Упростите выражение:

а) $(\sqrt{7} - 2)^2 - (\sqrt{7} - 3)(\sqrt{7} + 3) + 2\sqrt{28}$; б) $\frac{6}{\sqrt{3}}$.

2. Решите уравнение $\sqrt{2}x = \sqrt{8} - \sqrt{18}$.

3. Внесите множитель под знак корня:

а) $5\sqrt{3}$; б) $-2\sqrt{13}$.

Вариант 2

1. Упростите выражение:

а) $(\sqrt{6} - 3)^2 - (\sqrt{6} - 2)(\sqrt{6} + 2) + 2\sqrt{54}$; б) $\frac{8}{\sqrt{2}}$.

2. Решите уравнение $\sqrt{3}x = \sqrt{12} - \sqrt{27}$.

3. Внесите множитель под знак корня:

а) $3\sqrt{5}$; б) $-8\sqrt{11}$.

П-22. Преобразования выражений, содержащих корни

Вариант 1

Найдите значение выражения:

а) $x^2 + \sqrt{2}x - 5$ при $x = 0$, $x = -\sqrt{2}$, $x = 3 - \sqrt{2}$;

б) $\frac{a + \sqrt{3}}{a - \sqrt{3}}$ при $a = 0$, $a = -\sqrt{3}$, $a = 2 + \sqrt{3}$, $a = \sqrt{3}$.

Вариант 2

Найдите значение выражения:

а) $a^2 - \sqrt{3}a + 4$ при $a = 0$, $a = -\sqrt{3}$, $a = 2 - \sqrt{3}$;

б) $\frac{x + \sqrt{2}}{x - \sqrt{2}}$ при $x = 0$, $x = -\sqrt{2}$, $x = 3 - \sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$.

Глава 3. Квадратные уравнения

П-23. Определение квадратного уравнения

Вариант 1

Составьте квадратное уравнение по его коэффициентам и проверьте, является ли указанное число корнем этого уравнения:

а) $a = 2$, $b = -3$, $c = 1$; $\frac{1}{2}$;

б) $a = -1$, $b = 4$, $c = 0$; 4;

в) $a = \sqrt{2}$, $b = -1$, $c = \sqrt{2}$; $\sqrt{2}$.

Вариант 2

Составьте квадратное уравнение по его коэффициентам и проверьте, является ли указанное число корнем этого уравнения:

а) $a = 3$, $b = -2$, $c = -1$; $-\frac{1}{3}$;

б) $a = -1$, $b = 0$, $c = 9$; 3 ;

в) $a = \sqrt{3}$, $b = -1$, $c = \sqrt{3}$; $\sqrt{3}$.

П-24. Определение числа корней квадратного уравнения

Вариант 1

Вычислите дискриминант квадратного уравнения и укажите, сколько корней имеет уравнение:

а) $5x^2 - 3x - 1 = 0$; в) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$;

б) $3x^2 - 7 = 0$; г) $113x^2 - x - 2 = 0$.

Вариант 2

Вычислите дискриминант квадратного уравнения и укажите, сколько корней имеет уравнение:

а) $7x^2 - 2x - 1 = 0$; в) $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 = 0$;

б) $4x^2 - 3x = 0$; г) $115x^2 - x - 3 = 0$.

П-25. Решение квадратных уравнений

Вариант 1

Решите квадратное уравнение:

а) $3x^2 - 2x + 5 = 0$; г) $x^2 - 2x - 2 = 0$;

б) $3x^2 - 2x - 1 = 0$; д) $x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$.

в) $x^2 + 10x + 25 = 0$;

Вариант 2

Решите квадратное уравнение:

а) $2x^2 - 3x + 5 = 0$; г) $x^2 - 2x - 4 = 0$;

б) $x^2 + 8x + 16 = 0$; д) $x^2 - \sqrt{3}x - 1 = 0$.

в) $3x^2 - 2x - 5 = 0$;

П-26. Решение квадратных уравнений

Вариант 1

Решите уравнение:

а) $(2x - 1)(x + 3) = 4$;

б) $(x - 2)^2 - 5x(x + 3) = 5 - 23x$;

в) $-3x(x - 1) = 5$.

Вариант 2

Решите уравнение:

а) $(2x + 1)(x - 3) = -6$;

б) $(x + 3)^2 - 5x(x - 2) = 10(2x + 1)$;

в) $-2x(x - 1) = 5$.

П-27. Составление уравнения по условию задачи

Вариант 1

Составьте уравнение по условию задачи:

От квадрата задуманного натурального числа x отняли 63 и получили удвоенное задуманное число. Какое число было задумано? Сделайте проверку.

Вариант 2

Составьте уравнение по условию задачи:

От квадрата задуманного натурального числа x отняли 10 и получили число на 2 больше задуманного. Какое число было задумано? Сделайте проверку.

П-28. Решение задач с помощью уравнений

Вариант 1

Два последовательных четных числа таковы, что квадрат большего из них в 9 раз больше меньшего числа. Найдите эти числа.

Вариант 2

Два последовательных нечетных числа таковы, что квадрат большего из них в 9 раз больше меньшего числа. Найдите эти числа.

П-29. Решение задач **с помощью уравнений**

Вариант 1

Одну сторону квадрата уменьшили на 2 см, а другую — на 1 см и получили прямоугольник площадью 6 см². Найдите длину стороны квадрата. Изобразите квадрат и прямоугольник.

Вариант 2

Одну сторону квадрата увеличили на 2 см, а другую — на 1 см и получили прямоугольник площадью 12 см². Найдите длину стороны квадрата. Изобразите квадрат и прямоугольник.

П-30. Решение неполных **квадратных уравнений**

Вариант 1

Решите уравнение:

а) $-2x^2 + x = 0$; г) $5(2x - 3) = x^2 - 2(7,5 - 5x)$;
б) $7x^2 + 14 = 0$; д) $(y - 1)^2 + 2y = 3\left(y + \frac{1}{3}\right)$.
в) $7y^2 - 14 = 0$;

Вариант 2

Решите уравнение:

а) $7x^2 - x = 0$; г) $2(5y - 3) = y^2 - 5(1,2 - 2y)$;
б) $2y^2 + 14 = 0$; д) $(x + 1)^2 - 2x = 7\left(x + \frac{1}{7}\right)$.
в) $2x^2 - 14 = 0$;

П-31. Решение неполных **квадратных уравнений**

Вариант 1

Решите уравнение:

а) $\frac{x^2 + 4}{2} - \frac{3 - x}{3} = 1$; б) $\frac{2x + 7}{5} - 1 = \frac{x^2 + 4x}{10}$.

Вариант 2

Решите уравнение:

а) $\frac{x^2 + 4,5}{3} - \frac{2 - x}{4} = 1$; б) $\frac{2x + 5}{3} - 1 = \frac{x^2 + 4x}{6}$.

П-32. Теорема Виета

Вариант 1

Каждое из уравнений имеет два корня: x_1 и x_2 . Не находя их, найдите значения выражений $x_1 + x_2$ и $x_1 \cdot x_2$:

а) $x^2 - 7x - 9 = 0$; в) $5x^2 - 7x = 0$;
б) $2x^3 + 8x - 19 = 0$; г) $13x^2 - 25 = 0$.

Вариант 2

Каждое из уравнений имеет два корня: x_1 и x_2 . Не находя их, найдите значения выражений $x_1 + x_2$ и $x_1 \cdot x_2$:

а) $x^2 + 8x - 11 = 0$; в) $4x^2 + 9x = 0$;
б) $3x^2 - 7x - 12 = 0$; г) $17x^2 - 50 = 0$.

П-33. Теорема Виета

Вариант 1

1. Зная один из корней данного уравнения, найдите другой корень, используя теорему Виета:

а) $x^2 - 13x - 48 = 0$, $x_1 = -3$;

б) $2x^2 - 5x + 2 = 0$, $x_1 = 2$.

2. Какое число надо подставить вместо a , чтобы корнями полученного уравнения были числа 2 и 3:

а) $x^2 - ax + 6 = 0$; б) $x^2 - 5x + (a - 4) = 0$?

Вариант 2

1. Зная один из корней данного уравнения, найдите другой корень, используя теорему Виета:

а) $x^2 - 4x - 21 = 0$, $x_1 = -3$;

б) $2x^2 - 7x + 6 = 0$, $x_1 = 2$.

2. Какое число надо подставить вместо a , чтобы корнями полученного уравнения были числа 2 и 3:

а) $x^2 - 5x + a = 0$; б) $x^2 - (a + 1)x + 6 = 0$?

П-34. Теорема Виета

Вариант 1

Убедитесь, определив знак дискриминанта квадратного уравнения, что уравнение $2x^2 - 18x - 19 = 0$ имеет два корня x_1 и x_2 , и найдите значения выражений:

$$\frac{x_1 + x_2}{3}; \quad 2x_1 \cdot x_2; \quad x_1 \cdot x_2^2 + x_1^2 \cdot x_2; \quad x_1^2 + x_2^2.$$

Вариант 2

Убедитесь, определив знак дискриминанта квадратного уравнения, что уравнение $2x^2 - 36x - 17 = 0$ имеет два корня x_1 и x_2 , и найдите значения выражений:

$$\frac{x_1 + x_2}{8}; \quad 2x_1 \cdot x_2; \quad x_1 \cdot x_2^2 + x_1^2 \cdot x_2; \quad x_1^2 + x_2^2.$$

П-35. Разложение квадратного трехчлена на множители

Вариант 1

Разложите квадратный трехчлен на множители:

- а) $y^2 + 6y + 9$; в) $3x^2 - 7x + 4$; д) $-4x^2 + 7x$;
б) $x^2 - 2x - 8$; г) $3x + 10 - x^2$; е) $9a^2 - 25$.

Вариант 2

Разложите квадратный трехчлен на множители:

- а) $t^2 - 10t + 25$; в) $3x^2 - 8x + 5$; д) $16x^2 - 9$;
б) $x^2 - 3x - 10$; г) $2x + 8 - x^2$; е) $-5a^2 + 8a$.

П-36. Разложение квадратного трехчлена на множители

Вариант 1

Сократите дробь:

а) $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$; б) $\frac{5x - x^2}{x^2 + x - 30}$; в) $\frac{a^2 - 2a + 1}{2a^2 - 8a + 1}$.

Вариант 2

Сократите дробь:

а) $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2}$; б) $\frac{9 - x^2}{x^2 + 2x - 15}$; в) $\frac{a^2 + 2a + 1}{2a^2 + 3a + 1}$.

Глава 4. Системы уравнений

П-37. Линейное уравнение

с двумя переменными и его график

Вариант 1

1. Даны пары значений переменных x и y : (1; 2) и (2; -1). Какая из них является решением уравнения

$$3x - 2y = 8?$$

2. Имеет ли уравнение $x^2 + y^2 = 4$ решения? Если да, приведите пример; если нет, объясните почему.

3. Постройте график уравнения $x + y = -2$.

- 4*. Выясните, пересекает ли кривая $(x - 2)^2 + y^4 = 1$ ось ординат.

Вариант 2

1. Даны пары значений переменных x и y : (2; 1) и (1; -1). Какая из них является решением уравнения

$$2x - 5y = 7?$$

2. Имеет ли уравнение $x^2 + y^2 = 9$ решения? Если да, приведите пример; если нет, объясните почему.

3. Постройте график уравнения $x - y = 3$.

- 4*. Выясните, пересекает ли кривая $(x + 2)^4 + y^2 = 1$ ось ординат.

П-38. Уравнение прямой вида $y = kx + l$

Вариант 1

1. Запишите уравнения прямых в виде $y = kx + l$:

а) $x - y = 1$; б) $2y + x - 4 = 0$.

2. Найдите ординаты точек пересечения прямых из задания 1 с осью ординат и построьте эти прямые.

3. Постройте прямую, проходящую через точки $A(0; 2)$ и $B(2; 3)$. Определите знак углового коэффициента построенной прямой.

- 4*. Определите число a , зная, что прямая $y = (a + 1)x + 3$ параллельна прямой $y = 2x - 1$.

Вариант 2

1. Запишите уравнения прямых в виде $y = kx + l$:
а) $x + y = 2$; б) $2y - x - 6 = 0$.
 2. Найдите ординаты точек пересечения прямых из задания 1 с осью ординат и постройте эти прямые.
 3. Постройте прямую, проходящую через точки $A(0; 3)$ и $B(1; -1)$. Определите знак углового коэффициента построенной прямой.
- 4*. Определите число a , зная, что прямая $y = (a + 1)x + 4$ параллельна прямой $y = 3x + 5$.

П-39. Системы уравнений. Решение систем уравнений способом сложения

Вариант 1

1. Является ли пара $(2; 5)$ решением системы уравнений:
а) $\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ x + 4y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x - y = 5 \\ y - 5x + 5 = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - y = -3 \\ 2y - 2x = 5? \end{cases}$
2. Решите приведенные в задании 1 системы уравнений.
3. Пересекаются ли прямые $2y - 3x = -6$ и $2x + 3y = 17$? Если да, найдите координаты их точки пересечения.

Вариант 2

1. Является ли пара $(-5; 1)$ решением системы уравнений:
а) $\begin{cases} 2x + y = -3 \\ 2x - 7y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 6y = 1 \\ x = 1 - 6y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = -4 \\ 3y + 3x = 7? \end{cases}$
2. Решите приведенные в задании 1 системы уравнений.
3. Пересекаются ли прямые $4y - 3x = -17$ и $4x + 3y = 6$? Если да, найдите координаты их точки пересечения.

П-40. Решение систем уравнений **способом подстановки**

Вариант 1

Решите систему уравнений способом подстановки:

$$\text{а) } \begin{cases} y = 2x \\ 4x + 5y = 28; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} p - 3q = 1 \\ p^2 - 9q = 7; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2u - v = 3 \\ 7u + 3v = 4; \end{cases} \quad \text{г)* } \begin{cases} x = 2z \\ y - z + 3 = 0 \\ x + y + z = 9. \end{cases}$$

Вариант 2

Решите систему уравнений способом подстановки:

$$\text{а) } \begin{cases} a = 3b \\ 5a + 2b = 34; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} u - 2q = 1 \\ u^2 - 4q = 5; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3p - q = 2 \\ 5p - 3q = -6; \end{cases} \quad \text{г)* } \begin{cases} z = 4x \\ y - x - 2 = 0 \\ x + 2y - z = 3. \end{cases}$$

П-41. Решение задач с помощью **систем уравнений**

Вариант 1

1. Известно, что у причала стоят четырехместные и трехместные лодки, причем четырехместных на одну больше, чем трехместных. Всего в эти лодки могут поместиться 32 человека. Были даны следующие ответы на вопрос, сколько лодок каждого типа стоит у причала:
а) 7 четырехместных и 5 трехместных;
б) 6 четырехместных и 5 трехместных.
Проверьте предложенные ответы.

2. В двух бочках было 100 л жидкости. Из первой бочки отлили 25% содержимого, а из второй — 10%; всего отлили 19 л. Сколько жидкости было в каждой бочке?

Вариант 2

1. Известно, что пятирублевыми и двухрублевыми монетами была выплачена сумма в 41 р., причем пятирублевых

монет было использовано на четыре больше, чем двухрублевых. Были даны следующие ответы на вопрос, сколько монет каждого вида было использовано:

- а) 5 пятирублевых и 2 двухрублевые;
- б) 6 пятирублевых и 2 двухрублевые.

Проверьте предложенные ответы.

- 2. В двух коробках 120 конфет. Из первой коробки взяли 25% от всех конфет, а из второй — 20%. Всего взяли 28 конфет. Сколько конфет было в каждой коробке?

П-42. Задачи на координатной плоскости

Вариант 1

- 1. Запишите уравнение прямой, параллельной прямой $y = 4x - 5$ и проходящей через точку $(2; 5)$.
- 2. Запишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1; 3)$ и $B(2; 9)$.
- 3*. Найдите такое число a , что три прямые $y = 3x + 5$, $y = 4x + 5$, $y = 2x + a$ пересекаются в одной точке.

Вариант 2

- 1. Запишите уравнение прямой, параллельной прямой $y = -3x + 2$ и проходящей через точку $(3; 4)$.
- 2. Запишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(-2; 7)$ и $B(2; -1)$.
- 3*. Найдите такое число a , что три прямые $y = 4x - 3$, $y = 7x - 3$, $y = -3x + a$ пересекаются в одной точке.

Глава 5. Функции

П-43. Чтение графиков

Вариант 1

На рисунке 43 изображен график, показывающий процесс наполнения бака водой. Ответьте на вопросы:

- а) Сколько литров воды стало в баке через 2 мин?
- б) Уменьшался ли в рассматриваемый период объем воды в баке? Если да, то сколько времени?

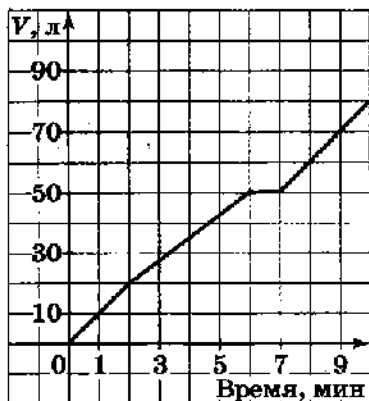


Рис. 43

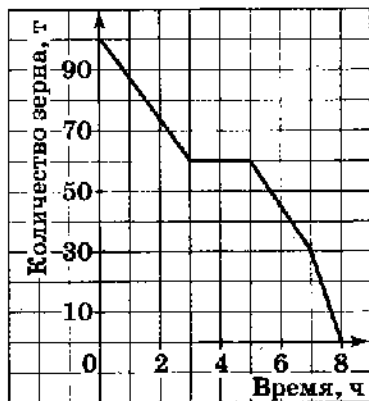


Рис. 44

в) Прерывался ли процесс наполнения бака? Если да, то на какое время?

г) Менялась ли скорость наполнения бака в течение первых трех минут? Если да, то когда она была наибольшей?

Вариант 2

На рисунке 44 изображен график, показывающий процесс вывоза зерна из хранилища. Ответьте на вопросы:

а) Сколько тонн зерна стало в хранилище через 3 ч?

б) Увеличивалось ли в рассматриваемый период количество зерна в хранилище? Если да, то сколько времени?

в) Прерывался ли процесс освобождения хранилища от зерна? Если да, то на какое время?

г) С постоянной ли скоростью шел процесс уменьшения количества зерна в хранилище в течение последних трех часов? Если нет, то когда эта скорость была наибольшей?

П-44. Что такое функция

Вариант 1

1. Дана функция $f(x) = 2x^2 - 4x$. Найдите $f(0)$ и $f(-1)$.
2. Найдите значение аргумента, при котором функция $y = 3x - 2$ принимает значение, равное 1.

3. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = 2x - 7$;

б) $f(x) = \frac{x-2}{x+6}$;

в)* $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-2)(x+3)} & \text{при } x > 0 \\ x^3 + 1 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$

Вариант 2

1. Дана функция $f(x) = 5x^2 + x$. Найдите $f(0)$ и $f(1)$.

2. Найдите значение аргумента, при котором функция $y = 5x + 4$ принимает значение, равное -1 .

3. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = 3x + 6$;

б) $f(x) = \frac{x+2}{x-9}$;

в)* $f(x) = \begin{cases} 2 - x^3 & \text{при } x > 0 \\ \frac{2}{(x-5)(x+4)} & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$

П-45. График функции

Вариант 1

1. На рисунке 45 изображен график функции $y = f(x)$ на отрезке $[-3; 3]$. Найдите:

а) $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$;

б) значения x , при которых $f(x) = 3$.

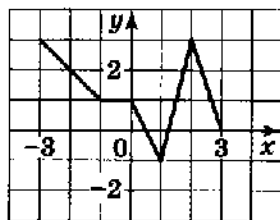


Рис. 45

2. Дана функция $y = \frac{x+1}{x^2+1}$. Ответьте на вопросы:

а) Проходит ли ее график через начало координат?

б) Пересекает ли ее график ось ординат; ось абсцисс (если да, то укажите координаты точек пересечения)?

в)* Верно ли, что график этой функции целиком расположен в верхней полуплоскости (ответ обоснуйте)?

Вариант 2

1. На рисунке 46 изображен график функции $y = f(x)$ на отрезке $[-3; 3]$. Найдите:

а) $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$;

б) значения x , при которых $f(x) = -2$.

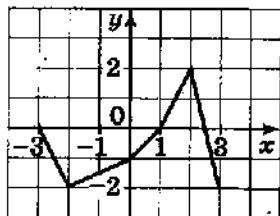


Рис. 46

2. Дана функция $y = \frac{x-1}{x^2+4}$. Ответьте на вопросы:

- Проходит ли ее график через начало координат?
- Пересекает ли ее график ось ординат; ось абсцисс (если да, то укажите координаты точек пересечения)?
- * Верно ли, что график этой функции целиком расположен в верхней полуплоскости (ответ обоснуйте)?

П-46. Свойства функций

Вариант 1

1. На рисунке 47 изображен график функции $y = f(x)$ на отрезке $[-4; 4]$.

- Есть ли у функции наибольшее и наименьшее значения; если есть, то чему они равны?
- Укажите нули функции.
- Укажите промежутки, на которых она возрастает.
- Укажите промежутки, на которых функция убывает.

2*. Постройте график какой-нибудь функции, определенной на всей числовой оси, возрастающей при $x \leq 2$, убывающей при $x \geq 2$, имеющей наибольшее значение, равное 3, и один нуль.

Вариант 2

1. На рисунке 48 изображен график функции $y = f(x)$ на отрезке $[-5; 3]$.

- Есть ли у функции наибольшее и наименьшее значения; если есть, то чему они равны?
- Укажите нули функции.

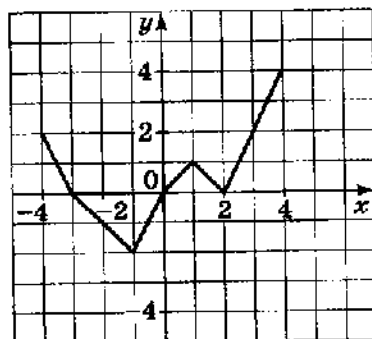


Рис. 47

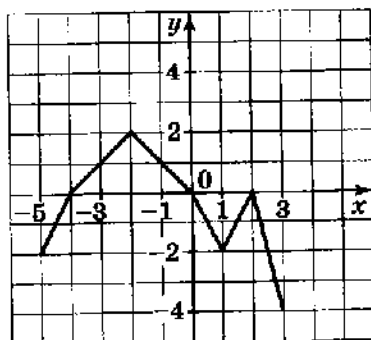


Рис. 48

- в) Укажите промежутки, на которых она возрастает.
 г) Укажите промежутки, на которых функция убывает.

2*. Постройте график какой-нибудь функции, определенной на всей числовой оси, убывающей при $x \leq 3$, возрастающей при $x \geq 3$, имеющей наименьшее значение, равное -2 , и один нуль.

П-47. Линейная функция

Вариант 1

1. Напишите какую-нибудь формулу, задающую возрастающую линейную функцию.
2. На рисунке 49, а—в изображены графики функций. На каком из рисунков изображен график линейной функции?

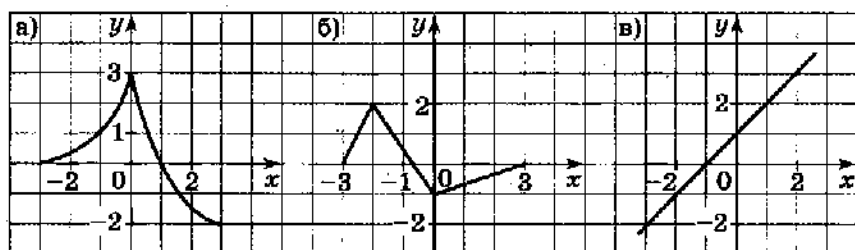


Рис. 49

3. Постройте графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и определите значения x , при которых $f(x) = g(x)$; $f(x) > g(x)$:
 а) $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = 1$;
 б)* $f(x) = 1$, $g(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{при } x < 3 \\ 2x - 6 & \text{при } x \geq 3 \end{cases}$.

Вариант 2

1. Напишите какую-нибудь формулу, задающую убывающую линейную функцию.
2. На рисунке 50, а—в изображены графики функций.

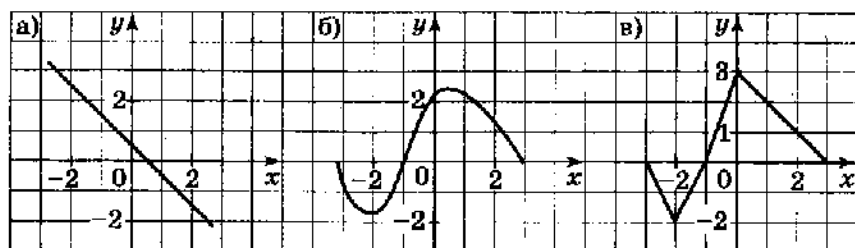


Рис. 50

На каком из рисунков изображен график линейной функции?

3. Постройте графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и определите значения x , при которых $f(x) = g(x)$; $f(x) > g(x)$:

а) $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = -1$;

б)* $f(x) = -1$, $g(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{при } x \geq 2 \\ 2x - 4 & \text{при } x < 2. \end{cases}$

П-48. Функция $y = \frac{k}{x}$ и ее график

Вариант 1

Дана функция $f(x) = \frac{8}{x}$.

а) Найдите значения $f(-3)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(4)$.

б) Постройте график функции $y = f(x)$.

в) Укажите, при каких значениях x значения функции положительны, при каких — отрицательны.

г) Убывает ли эта функция на луче $x < 0$?

д) При каких значениях x значение функции равно -2 ? 32 ?

е)* При каких значениях x значение функции меньше $\frac{1}{10}$?

Вариант 2

Дана функция $f(x) = -\frac{6}{x}$.

а) Найдите значения $f(-2)$, $f(-1)$, $f(3)$, $f(6)$.

б) Постройте график функции $y = f(x)$.

в) Укажите, при каких значениях x значения функции положительны, при каких — отрицательны.

г) Возрастает ли эта функция на луче $x > 0$?

д) При каких значениях x значение функции равно 2 ? -36 ?

е)* При каких значениях x значение функции больше $-\frac{1}{10}$?

Глава 6. Вероятность и статистика

П-49. Статистические характеристики

Вариант 1

1. В таблице приведен возраст сотрудников одного учреждения:

Фамилия	Возраст
1. Башмачкин	42
2. Галошев	24
3. Каблуков	30
4. Сапогов	24
5. Тапочкин	40

Найдите размах, моду, медиану и среднее арифметическое этого ряда.

- 2*. Постройте ряд из четырех чисел, у которого размах равен 2, а среднее арифметическое равно моде.

Вариант 2

1. В таблице приведено количество очков, набранное в чемпионате некоторыми баскетболистками:

Фамилия	Набрано очков
1. Дождева	48
2. Градова	26
3. Ливнева	20
4. Метелева	40
5. Снегова	26

Найдите размах, моду, медиану и среднее арифметическое этого ряда.

- 2*. Постройте ряд из четырех чисел, у которого размах равен 2, а среднее арифметическое равно медиане.

П-50. Вероятность равновозможных событий

Вариант 1

1. В классе 12 мальчиков, шестерых из них зовут Сережами, четверых — Алешами, а остальных — Сашами. Новый учитель, еще не знающий имен учащихся, вызывает их к доске.
 - а) Вызывается один мальчик. Какова вероятность того, что его зовут Сережей?
 - б) Вызывается один мальчик. Какова вероятность того, что его зовут Алешей?
 - в) Какое наименьшее количество мальчиков нужно вызвать, чтобы с вероятностью 100% среди них был Саша?
2. Объясните, равновероятны ли следующие события:
 - а) сумма цифр наугад написанного двузначного числа равна 1;
 - б) сумма цифр наугад написанного двузначного числа равна 5.

Вариант 2

1. В классе 15 девочек, восьмерых из них зовут Ленами, пятерых — Анями, а остальных — Наташами. Новый учитель, еще не знающий имен учащихся, вызывает их к доске.
 - а) Вызывается одна девочка. Какова вероятность того, что ее зовут Наташей?
 - б) Вызывается одна девочка. Какова вероятность того, что ее зовут Леной?
 - в) Какое наименьшее количество девочек нужно вызвать, чтобы с вероятностью 100% среди них была Аня?
2. Объясните, равновероятны ли следующие события:
 - а) сумма цифр наугад написанного трехзначного числа равна 1;
 - б) сумма цифр наугад написанного двузначного числа равна 6.

П-51. Геометрические вероятности

Вариант 1

На рисунке 51 изображена мишень ABC , имеющая форму равностороннего треугольника; точки K , M и N — середины его сторон.

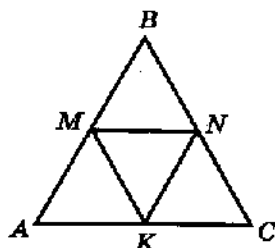


Рис. 51

а) Стрелок, стрелявший в мишень, не целясь, попал в нее. Какова вероятность того, что он попал в четырехугольник $AMNK$? в треугольник AMK ?

б)* Перерисуйте мишень и закрасьте на своем рисунке такую область, что вероятность попадания в нее при случайном попадании в мишень равна $\frac{1}{12}$.

Вариант 2

На рисунке 51 изображена мишень ABC , имеющая форму равностороннего треугольника; точки K , M и N — середины его сторон.

а) Стрелок, стрелявший в мишень, не целясь, попал в нее. Какова вероятность того, что он попал в четырехугольник $KMBN$? в треугольник BMN ?

б)* Перерисуйте мишень и закрасьте на своем рисунке такую область, что вероятность попадания в нее при случайном попадании в мишень равна $\frac{1}{8}$.

Содержание

Предисловие	3
-------------------	---

Раздел I. ОБУЧАЮЩИЕ РАБОТЫ

Глава 1. Алгебраические дроби

О-1. Повторение. Действия с одночленами и многочленами	4
О-2. Алгебраические дроби	6
О-3. Основное свойство дроби	9
<i>Проверь себя!</i>	11
О-4. Сложение и вычитание алгебраических дробей	12
О-5. Умножение и деление дробей, возведение в степень	15
О-6. Совместные действия с алгебраическими дробями	17
<i>Проверь себя!</i>	18
О-7. Степень с целым показателем	19
О-8. Свойства степени с целым показателем	22
<i>Проверь себя!</i>	24
О-9. Решение уравнений и задач	25

Глава 2. Квадратные корни

О-10. Извлечение квадратного корня	27
О-11. Иррациональные числа	29
О-12. Решение уравнений вида $x^2 = a$	30
О-13. Свойства квадратного корня	—
О-14. Преобразование выражений, содержащих квадратные корни	34
<i>Проверь себя!</i>	37
О-15. Кубический корень	38

Глава 3. Квадратные уравнения

О-16. Квадратные уравнения	39
О-17. Решение квадратных уравнений по формуле корней	41
О-18. Вторая формула корней квадратного уравнения	43
О-19. Решение задач	44
О-20. Неполные квадратные уравнения	45
<i>Проверь себя!</i>	46
О-21. Теорема Виета	47
О-22. Разложение квадратного трехчлена на множители	49
<i>Проверь себя!</i>	52

Глава 4. Системы уравнений

О-23. Линейное уравнение с двумя переменными	53
О-24. График линейного уравнения с двумя переменными	54
О-25. Уравнение прямой вида $y = kx + l$	57
О-26. Системы уравнений. Решение систем уравнений способом сложения	60
О-27. Решение систем уравнений способом подстановки	64
О-28. Решение задач с помощью систем уравнений	69
О-29. Задачи на координатной плоскости	73
Проверь себя!	75

Глава 5. Функции

О-30. Чтение графиков	76
О-31. Что такое функция	80
О-32. График функции	83
О-33. Свойства функции	86
О-34. Линейная функция	89
О-35. Функция $y = \frac{k}{x}$ и ее график	93
Проверь себя!	96

Глава 6. Вероятность и статистика

О-36. Решение комбинаторных задач (повторение)	98
О-37. Статистические характеристики	99
О-38. Вероятность равновозможных событий	102
О-39. Сложные эксперименты	104
О-40. Геометрические вероятности	106
Проверь себя!	108

Дополнительная обучающая работа

О-41*. Уравнения с параметрами	109
--------------------------------	-----

Раздел II. ПРОВЕРОЧНЫЕ РАБОТЫ

Глава 1. Алгебраические дроби

П-1. Алгебраические дроби	112
П-2. Основное свойство дроби	—
П-3. Приведение дробей к новому знаменателю и сокращение дробей	113
П-4. Сокращение дробей	114
П-5. Сложение и вычитание дробей	—
П-6. Сложение и вычитание дробей	—
П-7. Сложение и вычитание дробей	115

П-8. Умножение, деление и возведение в степень	115
П-9. Умножение, деление и возведение в степень	116
П-10. Все действия с алгебраическими дробями	—
П-11. Все действия с алгебраическими дробями	117
П-12. Определение степени с целым показателем	—
П-13. Стандартный вид числа	118
П-14. Свойства степени с целым показателем	—
П-15. Решение задач	119

Глава 2. Квадратные корни

П-16. Квадратные корни	119
П-17. Квадратные корни	—
П-18. Квадратные корни	120
П-19. Уравнения вида $x^2 = a$	—
П-20. Преобразования выражений, содержащих корни	121
П-21. Преобразования выражений, содержащих корни	—
П-22. Преобразования выражений, содержащих корни	122

Глава 3. Квадратные уравнения

П-23. Определение квадратного уравнения	122
П-24. Определение числа корней квадратного уравнения	123
П-25. Решение квадратных уравнений	—
П-26. Решение квадратных уравнений	124
П-27. Составление уравнения по условию задачи	—
П-28. Решение задач с помощью уравнений	—
П-29. Решение задач с помощью уравнений	125
П-30. Решение неполных квадратных уравнений	—
П-31. Решение неполных квадратных уравнений	—
П-32. Теорема Виета	126
П-33. Теорема Виета	—
П-34. Теорема Виета	127
П-35. Разложение квадратного трехчлена на множители	—
П-36. Разложение квадратного трехчлена на множители	—

Глава 4. Системы уравнений

П-37. Линейное уравнение с двумя переменными и его график	128
П-38. Уравнение прямой вида $y = kx + l$	—
П-39. Системы уравнений. Решение систем уравнений способом сложения	129

П-40. Решение систем уравнений способом подстановки	130
П-41. Решение задач с помощью систем уравнений	—
П-42. Задачи на координатной плоскости	131

Глава 5. Функции

П-43. Чтение графиков	131
П-44. Что такое функция	132
П-45. График функции	133
П-46. Свойства функций	134
П-47. Линейная функция	135
П-48. Функция $y = \frac{k}{x}$ и ее график	136

Глава 6. Вероятность и статистика

П-49. Статистические характеристики	137
П-50. Вероятность равновозможных событий	138
П-51. Геометрические вероятности	139

Учебное издание

**Евстафьева Лариса Петровна
Карп Александр Позлевиц**

АЛГЕБРА

**Дидактические материалы
8 класс**

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

Центр естественно-математического образования

Редакция математики и информатики

Зав. редакцией Т. А. Бурмистрова

Редактор Л. В. Кузнецова

Младший редактор Е. А. Андреевкова

Художники О. П. Богомолова, А. В. Юдкин

Художественный редактор О. П. Богомолова

Техническое редактирование

и компьютерная верстка Н. В. Кондратьевой

Компьютерная графика О. Ю. Тупикиной

Корректоры И. А. Григалашвили, И. В. Чернова

**Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подпи-
сано в печать 08.12.16. Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская. Гарни-
тура SchoolBookCSanPin. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 6,76.
Доп. тираж 4000 экз. Заказ № 2398.**

**Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.**

**Отпечатано в ООО «Тульская типография».
300026, г. Тула, пр-т Ленина, 109.**